

# 偏微分方程式はどんなものか？

Y. Oono  
Department of Physics  
1110 W. Green Street  
University of Illinois at Urbana-Champaign  
Urbana, IL 61801-3080

y-oono@uiuc.edu

October 19, 2008

# 1 偏微分方程式—入門

## 1.1 波動、拡散および Laplace 方程式.

次の3つの偏微分方程式が応用上もっとも古典的な方程式である (→1.4-1.7) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = D \Delta \psi, \quad 0 = \Delta \psi. \quad (1.1)$$

ここで  $c$  とか  $D$  は正の定数、 $t$  は時間、 $\psi$  は (スカラー) 場 (空間  $\mathbf{x}$  と時間の関数)、そして記号  $\Delta$  は  $d$  次元空間の **ラプラス作用素** (Laplacian)

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (1.2)$$

である。

## 1.2 $\Delta$ の差分化 – ラプラシアン の直観的意味.

偏微分を差分化すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}_i) - \psi(\mathbf{x})}{\delta x_i}. \quad (1.3)$$

ここで  $\mathbf{x}$  は位置ベクトル、 $\delta \mathbf{x}_i$  は  $i$ -座標成分の増し分、そして  $\delta x_i = |\delta \mathbf{x}_i|$  である。二階微分は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \rightarrow \frac{\psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}_i) + \psi(\mathbf{x} - \delta \mathbf{x}_i) - 2\psi(\mathbf{x})}{\delta x_i^2}. \quad (1.4)$$

となる。したがって、ラプラス作用素 (1.2) は次のように近似される：

$$\Delta \psi(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{2d}{\delta^2} \left\{ \frac{1}{2d} \sum_{nn} \psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{x}) \right\}. \quad (1.5)$$

この式で  $nn$  は  $\mathbf{x}$  のすべての最近傍格子点  $\mathbf{y}$  を意味し、 $\delta \mathbf{x}_i$  はすべて同じ大きさ  $\delta$  を持つとしている。

括弧の中の一番目の量は  $\mathbf{x}$  の周りの格子点上での  $\psi$  の平均値なので、ラプラス作用素の直観的な (そして物理的な) 意味は「関数の値とその近くでの平均値の差」を計算する作用素ということになる。つまり  $\langle \rangle$  を局所平均として

$$\Delta \psi \propto \langle \psi \rangle - \psi \quad (1.6)$$

となる。

## 1.3 どこにでも出てくるラプラス作用素.

$\psi$  が等方的で一様な膜のその垂直方向 ( $z$ -方向) への小さな変位であるとする。1.2 によれ

ば、 $\Delta\psi$  は  $\psi(x)$  とその周りの高さの平均値の差になる。もしもその膜が平らになろうとするならば（つまり、平らな状態が安定、あるいは最低エネルギーの状態であるならば）、 $z$ -方向に働く復元力があり、それは  $\Delta\psi$  の増大関数であるに違いない。ここで、変位が小さいならば、復元力は  $\Delta\psi$  に比例するだろう。つまり、一様等方系では変位の復元力が変位に比例する時（これは Hooke の法則である）にはラプラス作用素が必ず現れることになる。これがあちこちにラプラス作用素が現れる理由である。

もしも、膜を古典力学的な系であると考えてよいならば、Newton の運動方程式が空間の各点で成り立たなくてはならない。つまり、波動方程式が得られる： $\partial_t^2\psi \propto \Delta\psi$ 。

もしも変位が  $\psi$  の緩和過程を引き起こすならば拡散方程式が得られる： $\partial_t\psi \propto \Delta\psi$ 。<sup>1</sup> このとき、最後に到達する状態は時間に依らないだろう。したがって、その状態は Laplace 方程式： $\Delta\psi = 0$  に支配されることになる。

#### 演習.

- (1) ラプラス作用素は（全体にかかる比例係数は除いて）唯一の球対称二階微分作用素である。ここで、球対称とは、座標系を  $O-xyz$  から  $O'-x'y'z'$  へと回転しても、新たな座標系  $O'-x'y'z'$  でのラプラス作用素  $\Delta'$  が回転前と一致する（ $\Delta = \Delta'$ ）ことである。
- (2)  $\Delta(1/r)$  を  $d$ -次元空間で計算せよ（ただし  $r \neq 0$  とする）。
- (3)  $\Delta r^\alpha$  を  $d$ -次元空間で計算せよ。もしも  $\alpha = 2 - d$  なら、何が起こるか？

### 1.4 波動方程式.

波動方程式は次の形をしている：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\Delta\psi. \quad (1.7)$$

ここで正の定数  $c$  は **波速** と呼ばれる（→3.4）。

#### 演習.

一次元空間では  $\sinh(x - ct)$  は波動方程式を満たす。より一般的に  $f(x \pm ct)$  は、もしも  $f$  が二階微分可能ならば波動方程式の解である（→3.4）。

### 1.5 空間並進.

波動方程式の重要な性質の一つは空間的擾乱が有限の速度で伝播することである。有限速度で擾乱が伝播する最も簡単な方程式は次の一階偏微分方程式で**輸送方程式** (transport equation) と呼ばれる：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.8)$$

初期条件  $u(x, 0) = f(x)$  のもとでのこの解は

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.9)$$

<sup>1</sup> 緩和過程は不可逆過程なので、方程式は時間反転に対して不変であるはずがない。これに対して、運動方程式は不変である。

となる。

もしも  $f$  が微分できないときは確かに (1.9) は輸送方程式の解ではない。それでも (1.9) には意味がある; これは **弱解** の例である。

## 1.6 拡散方程式.

**拡散方程式** (diffusion equation) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \Delta \psi \quad (1.10)$$

である。ここで正の定数  $D$  は**拡散係数**といわれる。

### 演習: Burgers 方程式.

$\phi$  が拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1.11)$$

に従うとき

$$u = -2\nu \frac{\partial \ln \phi}{\partial x} \quad (1.12)$$

は次の **Burgers 方程式** (Burgers equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.13)$$

に従う。この方程式は乱流のモデルとして提案された。この偏微分方程式は非線形だが、線形な方程式に変換できる。この変換 (1.12) は *Cole-Hopf 変換* とよばれている。

**課題: 衝撃波.** (1.13) を初期条件  $u(x, 0) = \sin x$  のもとで解くと、波の形はゆがんできて波の片方の勾配が大きくなっていくことがわかる。この傾向は  $\nu$  が小さいほど著しい。そこで、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.14)$$

では、非増大かつ定数でない初期条件では、それが滑らかでもついには滑らかでない解になってしまうだろうと想像することができる。これが **衝撃波** の生成である。必要な回数微分できて、もとの方程式を満足する関数を偏微分方程式の古典解 (classical solution) というが、衝撃波解は不連続なので古典解の範囲でこれを論じることができない。弱解というものが数学的興味にとどまるものでないことがわかる。

## 1.7 Laplace および Poisson 方程式.

Laplace 方程式は

$$0 = \Delta \psi \quad (1.15)$$

で与えられる。この方程式は波動方程式や拡散方程式の静止解 (時間に依存しない解) を支配する。

### 演習.

二次元空間で  $\ln(x^2 + y^2)$  は Laplace 方程式を満たす。

次の方程式

$$f = \Delta\psi \quad (1.16)$$

は **Poisson 方程式** (Poisson's equation) といわれる。ここに  $f$  は適当により性質を持った関数とする。

### 1.8 線形定数係数二階偏微分方程式の分類、主部

一般に、偏微分方程式とは未知関数とその偏微分および独立変数の間の関係式のことである。

線形定数係数二階偏微分方程式は一般に次の形をしている：

$$(a_{ij}\partial_i\partial_j + b_i\partial_i)\psi + c = 0. \quad (1.17)$$

ここで  $a_{ij}, \dots$  は定数とする。最高階の項 (**主部** (principal part) といわれる) が偏微分方程式の性格を規定するので、主部によって次のように分類する：

(1) 独立変数のアフィン変換によって主部を  $\Delta\psi$  に変換できるとき、偏微分方程式は **楕円型方程式** (elliptic equation) といわれる。

(2) 独立変数のアフィン変換によって主部を、波動方程式の主部に変換できるとき、偏微分方程式は **双曲型方程式** (hyperbolic equation) といわれる。

(3) 独立変数のアフィン変換によって主部を超曲面 ( $d$ -次元空間では  $(d-1)$ -次元の部分空間) でのラプラス作用素に変換できるとき、偏微分方程式は **放物型方程式** (parabolic equation) といわれる。

二次元空間では線形定数係数二階偏微分方程式の主部は

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.18)$$

と書ける。このとき

$$D \equiv AC - B^2, \quad (1.19)$$

を **判別式** (discriminant) という。その符号によって次のように分類される：<sup>2</sup>

(1) もし  $D > 0$  であれば 偏微分方程式は楕円型方程式といわれる。

(2) もし  $D < 0$  であれば 偏微分方程式は双曲型方程式といわれる。

(3) もし  $D = 0$  であれば 偏微分方程式は放物型方程式といわれる。

**演習.**

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + 2B\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0, \quad (1.20)$$

において、 $A, \dots$  は定数とする。(1)-(3) の各場合について、この方程式を「標準形」(混合偏微分項のない式) に変換する偏数変換を実際に作れ。

---

<sup>2</sup> 係数が定数でなく、時空の関数であるときも、局所的には同様な分類ができる。

## 課題

(A) 次の方程式は極小曲面についての Lagrange の方程式といわれる：

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_{xy} - yu_{xy} = 0. \quad (1.21)$$

ここで  $z = u(x, y)$  が極小曲面の式である。極小曲面とは与えられた縁の形のもとで面積が最小の曲面のこと。これは楕円型である。

**注意.** 非線形方程式では方程式の型は解に依存する。<sup>3</sup>

(B) (1.20) の係数が定数でないときは、方程式の型は時空の領域によって異なりうる。もっとも有名な例は Tricomi の方程式

$$y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.22)$$

である。

## 1.9 偏微分方程式を理解するために差分を活用しよう.

時間についての微分も差分化すれば

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \frac{\psi(t + \delta t) - \psi(t)}{\delta t} \quad (1.23)$$

となる。2次元空間での拡散方程式を考えよう。時空離散化をすれば

$$\frac{\psi(t + \delta t) - \psi(t)}{\delta t} = D \frac{\psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}_1) + \psi(\mathbf{x} - \delta \mathbf{x}_1) + \psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}_2) + \psi(\mathbf{x} - \delta \mathbf{x}_2) - 4\psi(\mathbf{x})}{\delta x^2}, \quad (1.24)$$

ここで  $\delta \mathbf{x}_i$  は  $i$ -座標に沿った小さな増し分を示す。この差分化の方法は単純 **Euler 法**といわれる。単純正方格子では、関数の値がある点  $\mathbf{x}$  とそのすべての最近傍格子点でわかっていれば、次の時間点での関数値が一義的に決まることが見てとれる。このことは、初期条件として初期時刻にすべての格子点での関数値が指定されなくてはならないことがわかる。もとの方程式に戻って考えれば、この事実は拡散方程式を解くのに初期条件：問題の領域全体で  $\psi$  を指定、が要ることを示唆する。境界条件については後ほど考える (→1.14)。

## 演習.

- (1) 上と同じ論理を波動方程式に適用すると何が示唆されるか？
- (2) 波動方程式に初期条件と終期条件を課することはできるか？

## 1.10 放物型方程式.

放物型方程式を理解するためには代表例として拡散方程式を使うことができる (→1.8(3))：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T. \quad (1.25)$$

その直観的理解には熱伝導をモデルに考えるのがよい。解を一義的に決めるためには補助条件が要る。それは**初期条件** (initial conditions) と **境界条件** (boundary conditions) である。

<sup>3</sup> 流体力学やレオロジーではこのようなことは珍しくない。Cf. D. D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids* (Springer, 1990). この本の出だしはわかりやすい。

### 1.11 拡散方程式の初期条件.

初期の物体の温度がわからなくては何も言えないことは明らかである。そこで初期条件として時刻  $t = 0$  に考えている物体のいたところの温度を与える。

### 1.12 Dirichlet 条件.

日常の経験から、物体の境界面<sup>4</sup>での温度が与えられていれば、上の初期条件のもとで物体内部の未来の温度分布が完全に決まると期待できる。境界で関数値をすべて与える境界条件を *Dirichlet 条件* (Dirichlet condition) という。

$T_1$  および  $T_2$  が同じ拡散方程式の同一の初期及び Dirichlet 境界条件の下での二つの解であるとする。このとき、 $u \equiv T_1 - T_2$  は同じ拡散方程式に従い、初期においていたところ 0 度、境界の温度も常に 0 度に保たれている (斉次条件 (homogeneous conditions) という) 場合の解である。つまり、始め 0 度の物体の温度はそれを 0 度の氷水につけておくとうちどう変化するかという問題である。当然温度は未来永劫 0 度のままのはずである。したがって、 $T_1 \equiv T_2$ 、つまりはじめの初期値-Dirichlet 境界問題は一義的な解を持つ。以上の議論は解の一義性を証明するための標準的論法であり厳密化できる。

### 1.13 Neumann 条件.

熱力学の基本仮定 (いわゆる第ゼロ法則) に拠れば<sup>5</sup> もしも系が熱力学的に孤立しているならば、それはついには一義的に決まった平衡状態に行く。したがって、境界で熱流のない条件 (断熱条件) は未来を一義的にする。二つの可能な解の差を 1.12 でやったように考えると、もしも境界において外向き法線方向の温度の勾配 (しばしば  $\partial T / \partial n$  と書かれる) が指定されれば (この境界条件を *Neumann 条件* という)、系の未来は確定することがわかる。

### 1.14 差分化による境界条件の理解.

以上述べた境界条件は方程式を差分化すると意味がよくわかる。1.9 でやったように、ラプラス作用素を単純 Euler 法で差分化しよう。隣が境界になっているような格子点を考え、そこでの値が確定するかどうかを考えよう。1.9 でみたように、現時点においてその格子点及び隣接格子点の値が確定していれば次の時刻のその格子点での値が決まるから Dirichlet 条件がよい条件であることはすぐわかる。Neumann 条件はそうには直接的ではないが、しかし境界での傾きは境界近くでの関数の値を (下の図にあるように) 確定するのでやはり未来が確定することになる。

<sup>4</sup> 境界は「いい」ものでなくてはならない。ここでは境界は区分的に滑らかでとげなど生えてないものとする。もしも棘のような特異点があると、解はないかもしれない。Lebesgue によってそのような例が与えられている。1.17 (2) 課題を見よ。

<sup>5</sup> 熱力学のよい参考書として、特にものをきちんと考えたい人には、田崎晴明「熱力学—現代的な視点から—」(培風館、2000) が推薦できる。非常に厳密な定式化については E. H. Lieb and J. Yngvason, *The Physics and Mathematics of the Second Law of Thermodynamics*, Phys. Rep. **310**, 1 (1999) を見よ。

### 1.15 Robin 条件.

1.14 に見たことから、もっとこみ入った境界条件もよい境界条件であり得ることがわかる： $f$  と  $g$  をゼロにならない関数として

$$g(x)\frac{\partial T}{\partial \nu} + f(x)T = h(x) \text{ on } \partial D \quad (1.26)$$

を境界で指定する ( $h$  に等しいと置く)。これから境界点のすぐ内側の格子点での関数値は一義に決まる。この条件を *Robin 条件* という。

### 1.16 放物型方程式の補助条件：演習

(1) Newton の冷却の法則によると放射で冷えつつある物体の温度に関する境界条件は

$$\frac{\partial T}{\partial n} = K(T_0 - T), \quad (1.27)$$

とかける。ここで  $K$  は正の定数、 $T_0$  は周りの温度である。物理的に、この条件が未来を一義に決めることを議論せよ。

(2) 拡散方程式について Robin 条件が未来を一義的に決めることを差分を使って確認せよ。

(3) 次の *Cahn-Hilliard 方程式* を区間  $[0,1]$  で  $t > 0$  について考えたい。解を一義的にするにはどういう境界条件が区間の端で必要だろうか？

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ -u + u^3 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}. \quad (1.28)$$

(4) 次の方程式は時間依存 Ginzburg-Landau 方程式 (TDGL 方程式) (time-dependent Ginzburg-Landau equation)<sup>6</sup> といわれる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a\psi - b\psi^3 + D\Delta\psi, \quad (1.29)$$

---

<sup>6</sup> 相変化の動力学を記述する標準的な方程式である。



ここで  $D$  と  $b$  は正の定数で  $a$  は定数である。この方程式を二次元正方形  $[0, 1] \times [0, 1]$  において周期的境界条件の下に解きたい。境界条件を書き下せ。

(5) 次の式及び境界条件の下で温度分布がどう変化するか、物理的な直観に基づいてその挙動をスケッチせよ。

### 1.17 楕円型方程式.

楕円型方程式 ( $\rightarrow$  1.8(1)) を理解するには Laplace 方程式 ( $\rightarrow$  1.7) を代表として考えればよい。物理的には十分に時間がたって時間変化しなくなった温度分布を考えればよい。したがって、1.12 - 1.15 で考えた境界条件はよい境界条件のはずである。

(1) **内部問題と外部問題.** 問題の領域が有界 (つまり、無限遠点が含まれていない) 場合、境界値問題は**内部問題** (interior problem) (cf. ??) といわれる。そうでないときは**外部問題** (exterior problem) といわれる (cf. ??)。外部問題は境界条件のみならず、遠くでの解の増加の仕方に制限を置かなくては解は一義にならない (?? 脚注, ??)。

**課題.**

一定間隔 (たとえば 1 メートル) を保って二枚の無限の平面導体があり、それらは接地されている (つまり 0 ボルトに保たれている—斉次 Dirichlet 条件)。この間の空間の静電ポテンシャルはどうなるか。実はこれは一義に決まらないのである [つまり、Laplace 方程式の外部 Dirichlet 問題の解は一義でないことを論じよ]。

(2) **Dirichlet 条件** 内部問題に置いてこの条件が解を一義的に決めることは拡散方程式の場合 1.12 と同じ議論で示すことができる; もしも壁がいつも 0 度なら中もおしまいには 0 度になるだろう。

**課題: 外部円錐条件.**

解が一義かどうかを論じる前に解が有るか無いかを論じる必要がある。解の存在の十分条件は**外部円錐条件**である。境界上の各点  $x$  に立体角が  $\epsilon > 0$  で高さが  $h > 0$  の円錐を頂点が  $x$  に来るように領域の外に置けることである。

(3) **Neumann 条件.** もしも系に流入する熱流の総和がゼロならば (さもないと系の温度は限界なしに変化してしまう) 系の定常温度分布を考えることが出来る。この総和制限付きの Neumann 条件下では最終的な温度分布は (加法的な定数を除いて) 一義的に決まる。

(4) **Robin 条件** は拡散方程式の場合 1.15 と同様に論じることが出来る。

**演習:**

$[0, 1] \times [0, 1]$  の上での Laplace 方程式に周期的境界条件を課したい。その条件を書け。解は一義的であるか?

### 1.18 双曲型方程式.

双曲型方程式を理解するには波動方程式を代表にとればよい。これは時間について二階の方程式であるから常微分方程式の場合から考えて、初期条件として、初期の変位だけでなく、初期の変位速度も系全体において指定しなくてはならない： $\psi_{t=0}$  と  $\partial_t \psi_{t=0}$  が必要になる。このことは次の離散化からも見てとれる。

$$\begin{aligned}\psi(t + \delta t, x) &= \psi(t, x) + \delta t \partial_t \psi(t, x), \\ \partial_t \psi(t + \delta t, x) &= \partial_t \psi(t, x) + \delta t [\Delta \psi]_t.\end{aligned}\tag{1.30}$$

境界条件は拡散方程式の場合と全く同様に論じられる。

#### 演習.

波動方程式の場合物理的にはどういう状況が Robin 条件にあたるか。

### 1.19 数学者は何をやっているか？

読者は補助条件下でのこれらの偏微分方程式の解の一義存在は明らかだという印象を持ったかも知れない。もしもこれらの偏微分方程式が、自然界に於けるわれわれの経験の忠実なモデル化ならば、それでいいのだが、実はその保証は誰がしてくれるのだろうか？偏微分方程式の理論の重要な部分はそれを解くより前に、その性質を調べることである。数学としての偏微分方程式の理論の重要な仕事はここにある。

## 2 線形性と重ね合わせ

### 2.1 典型的な線形偏微分方程式の問題.

典型的な線形初期値境界値問題は次の波動方程式の問題である。領域  $D^7$  において

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \psi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t),\tag{2.1}$$

が成り立ち、境界条件は：

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) \quad \text{for } \mathbf{r} \in \partial D \quad \text{for all } t > 0,\tag{2.2}$$

初期条件は：

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) \quad \text{and} \quad \partial_t \psi(\mathbf{r}, 0) = g(\mathbf{r}) \quad \text{on } D.\tag{2.3}$$

この手の問題を攻略する戦略は、いつも、より簡単な問題に線形性を使って分解することである (→2.3)。

---

<sup>7</sup> 領域とは、特にいわない限り連結した開集合を意味する。

## 2.2 線形性と重ね合わせの原理.

作用素とはある数学的対象を別の対象に写す写像のことである。たとえば、 $d/dx$  がその例として考えられるが、それが作用する領域（定義域）もきちんと規定して始めてまともな作用素となる。したがって、ここではあまり精密な話はしない。たとえば、

$$d/dx : f \rightarrow df/dx \quad (2.4)$$

や

$$\text{sq} : f \rightarrow f^2 \quad (2.5)$$

は作用素である。作用素  $L$  が **線形作用素** (linear operator) であるとは、

$$L(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha L\psi_1 + \beta L\psi_2, \quad (2.6)$$

が勝手な数係数  $\alpha, \beta$  についてつねに成立することである。この関係は**重ね合わせの原理** (superposition principle) と呼ばれる。たとえば、 $d/dx$  や 1.4 に出てきた  $\partial_t^2 - c^2\Delta$  は線形作用素である。上の sq はそうではない。

## 2.3 問題の線形分解.

多くの重要な問題が補助条件までこめて線形である。たとえば、 $\psi$  の値を境界  $\partial D$  で見積もることは次の線形写像

$$A_1 : \psi \rightarrow \psi|_{\partial D} \quad (2.7)$$

と解釈できる。同様に初期値を見積もること

$$A_2 : \psi \rightarrow \psi|_{t=0} \quad (2.8)$$

も線形演算である。したがって、2.1 にあるような線形問題は、上記の作用素  $A_1, A_2$  を使うと次のような一般形に書ける：

$$L\psi = \rho, \text{ with } A_1\psi = \varphi, \text{ and } A_2\psi = f. \quad (2.9)$$

重ね合わせの原理を使ってこれを次のように分解することができる：

(1)

$$L\psi_1 = 0 \text{ with } A_1\psi_1 = \varphi \text{ and } A_2\psi_1 = f, \quad (2.10)$$

および

(2)

$$L\psi_2 = \rho \text{ with } A_1\psi_2 = 0 \text{ and } A_2\psi_2 = 0. \quad (2.11)$$

(1) はさらに次のように分解される

(11)  $L\psi_{11} = 0$  with  $A_1\psi_{11} = \varphi$  and  $A_2\psi_{11} = 0$  and

(12)  $L\psi_{12} = 0$  with  $A_1\psi_{12} = 0$  and  $A_2\psi_{12} = f$ .

このようなさらなる分解が有用かどうかは問題による。

(2) においてももし  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  ならば、重ね合わせの原理を使って  $L\psi_i = \rho_i$  のみを解

けばいいが、ここでもこのようなさらなる分解が役に立つかどうかは場合による。

このような考察の延長上に、重ね合わせの原理を活用して、与えられた問題を「標準的な原子的問題」に分解することが考えられる。この重ね合わせの原理の窮極的利用が Fourier と Green によって提案された。彼らは線形性を利用する二つの典型的戦略を提案したのである。

## 2.4 Fourier の考え；1807 年頃.

Daniel Bernoulli は 1735 年に一次元波動方程式の解はすべて次の形にかけると主張した：

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2}a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(t) \cos nkx + b_n(t) \sin nkx\}, \quad (2.12)$$

ここで  $a_i(t)$  および  $b_i(t)$  は時間  $t$  の関数である。しかし、Euler も d'Alembert もこれは十分一般的な関数を表さないと考えて賛成しなかった。

この舞台に 50 年遅れて登場した Fourier は D. Bernoulli の考えを数学的に正当化したいと考えた。彼は今誰でも知っている Fourier 係数の積分による表現を与え、項別積分を使って（つまり積分と級数和の順序を変えて）Bernoulli の主張が正しいことを示そうとした。この考え方は同時代の大数学者たち Laplace や Langrange を説得するにはいたらなかったが、彼らも問題の重要性は認識した。こうして Fourier 級数の理論は現代数学のもっとも重要な動機を与えた。

## 2.5 Impact of Fourier.

The impact of Fourier's general assertion was not confined within applied mathematics. As we see below, it almost dictated Modern Mathematics.

In essence, if  $f$  is piecewise smooth function which can be Fourier-expanded, then the series can be termwisely differentiated to make the Fourier series for  $f'$ .

**(1) Function concept had to be clarified.** Fourier claimed that any function can be expanded into Fourier series (→2.4, 2.6). In those days the idea of function was not very clear. For example, there was a dispute between d'Alembert and Euler: Euler thought every hand-drawable function is a respectable function, but d'Alembert thought only analytically expressible functions are respectable. Therefore, to make sense out of Fourier's claim, the concept of function had to be clarified. Eventually, the modern concept of function as a map culminated through the work of Cauchy and Dirichlet: if a value  $f(x)$  is uniquely specified for a given value of the independent variable  $x$ , then  $f$  is a respectable function. Then, inevitably, many strange functions began to be found. Now, we know many examples such as fractal curves.<sup>8</sup> Nowhere continuous functions were also found. A famous example is the *Dirichlet function*:  $D(x) = 1$  if  $x$  is rational, and 0 otherwise.

---

<sup>8</sup> B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, 1985).

**(2) Convergence condition.** The convergence condition of infinite series had to be considered. This spurred Cauchy to construct his theory of convergence.

**(3) Concept of integration had to be sharpened.** Fourier proposed an integral formula for the Fourier coefficients. However, if a function  $f$  is not continuous, then it was not clear how to interpret the integral. To clarify this point, Riemann invented the concept of Riemann integration with clear integrability condition (in 1853).

**(4) Set theory became necessary.** Cantor found that even if the values of the function at infinitely many points were unknown, still the Fourier series was determined uniquely. He studied very carefully how large ‘sets’ of points could be removed without affecting the Fourier coefficients. Soon he had to characterize these collections of points. The first surprise he found was that infinity of the totality of real numbers and that of rational numbers are distinct.<sup>9</sup> To organize his theory of infinity, Cantor attempted to introduce the concept of ‘set.’ However, many antinomies (‘paradoxes’) were found.<sup>10</sup>

**(5) Securing foundation required axiomatic set theory.** Eventually, to secure the foundation of set theory a set of axioms<sup>11</sup> were introduced by Zermelo.<sup>12</sup> Hence, the currently most popular axiomatic system of mathematics (ZFC) is under almost the direct impact of Fourier’s idea.

**(6) Further sharpening of integration concept was required.** According to Cantor the area of  $D(x)$  for  $x \in [0, 1]$  must be zero, but we cannot make any sense out of the Riemann integral of the Dirichlet function  $D$ . A more powerful integral was needed, which was eventually provided by Lebesgue as the Lebesgue integration.

## Discussion.

The reader must know and be able to explain to her lay friend the argument showing that  $\mathbf{Q}$  is countable, but  $[0, 1]$  is not. Also she must be able to explain why  $[0, 1]^n$  for any  $n \in \mathbf{N}$  has the same density as  $[0, 1]$  (i.e., there is a one-to-one correspondence between any dimensional cube and the interval  $[0, 1]$ ).

## 2.6 Who was Fourier?<sup>13</sup>

Jean Baptiste Joseph Fourier was born on March 21, 1768 in Auxerre in the province of

<sup>9</sup> Cantor’s first important result (December, 1873).

<sup>10</sup> Perhaps the most famous antinomy is the Russel paradox (1902). The Russel paradox is as follows. ‘Sets’ can be classified into two classes: ‘sets’ which contain themselves as their elements ( $x \in x$ ) and ‘sets’ which do not contain themselves ( $x \notin x$ ). Make the ‘set’  $Z$  of all the ‘sets’  $x$  such that  $x \notin x$ :  $Z \equiv \{x : x \notin x\}$ . Is  $Z$  in  $Z$  or not? If  $Z \notin Z$ , then  $Z \in Z$ , but if  $Z \in Z$ , then  $Z \notin Z$ , a paradox.

<sup>11</sup> Y. N. Moschovakis, *Notes on Set Theory* (Springer, 1994) and J. Winfried and M. Weese, *Discovering Modern Set Theory I. the basics* (AMS, 1996) are recommended. P. Maddy, *Realism in Mathematics* (Oxford, 1990) may be used to understand the background of axiomatic set theories.

<sup>12</sup> Ernst Friedrichs Ferdinand Zermelo, 1871-1953. For physicists, Zermelo is famous for his discussion against Boltzmann: the ‘Rückkehrwand.’ He was an assistant of Planck in those days and was against atomism (as his boss was). See G. H. Moore, *Zermelo’s Axiom of Choice, its origins, development, and influence* (Springer, 1982). Perhaps this is more entertaining than many novels.

<sup>13</sup> This is based on Grattan-Guinness’s book cited below and on Section 92-3 of T. W. Körner, *Fourier Analysis* (Cambridge, 1990), which is probably the best introductory book of Fourier analysis for those who can appreciate right mathematical taste.

Yvonne, the nineteenth (and not the last) child of a master tailor, Joseph Fourier. Although he became an orphan at the age of nine, his brilliance gained him a free place at the local Benedictine school. He discovered mathematics around the age of thirteen and gave it all his spare time. Legendre was a school inspector who supported Fourier's ambition to pursue a military career, but he was turned down so he entered the Benedictine abbey of St. Benoit-sur-Loire as a novice in 1787. Although his study continued and he could submit a paper to the Academy in 1789, the Revolution began. He took the opportunity to relinquish his novitiate, and returned to Auxerre to be a teacher of his old school. He built a fine reputation as a lecturer of mathematics, rhetoric, philosophy and history. He joined the local Jacobin party, but he worked hard for the protection of victims of tyranny. His outspoken criticism of corruption of his fellow officials led to the issue of a decree in 1794 demanding his arrest and summary guillotining; this was his baptism into real politics. Despite the public outcry against his arrest, he was arrested and imprisoned. His release was somehow grudgingly agreed by St. Just, when Robespierre was arrested and executed on July 28, 1794, and Fourier was released anyway on a general amnesty. After much more turmoil (being arrested, released, rearrested, etc.) he eventually succeeded Lagrange in the Chair of Analysis and Mechanics at Ecole Polytechnique, when he was ordered to join Napoleon's invasion of Egypt (May, 1798). His first paper was published in 1798 (On analytical mechanics) and he worked on a theorem about the roots of polynomials (extending Descartes' rule). He was appointed *secrétaire perpétuel* of L'Institut d'Egypt in Cairo in August 1799; he was the leader of a scientific expedition in Upper Egypt in 1799 to investigate monuments and inscriptions.

He returned to France in mid November of 1801 when the French expedition surrendered to the British; he organized much of the departure. He wished to teach again at Ecole Polytechnique and actually gave a few lectures, but Napoleon did not wish his talent to be wasted. He was appointed the Prefect around Grenoble in February 1802. During his 14 year tenure, he drained twenty thousand acres of swamp around Bourgoin (visiting personally almost every household in the area to explain the advantages of the scheme!), which resulted in major economic and health benefits. He also made a new road across the Alps (shortest from Lyon to Trino; present Route N91; among all his prefectural assignments this gave him the greatest satisfaction). Meanwhile he helped the making of the *Description of Egypt* and made an epoch in Egyptology (actually, to make a record of the discoveries of the expedition was proposed by himself; these volumes laid the foundations of modern Egyptology). At a personal level he encouraged Champollion and as Prefect protected his protégé from conscription.

While being Prefect, he studied heat diffusion problem and developed his new approach; he never described how or when he came to study the problem. He seems to have started his research around 1802, but seems to have not yet found his new approach by the latter half of 1804. In three remarkable years he found the diffusion equation ( $\rightarrow$ 1.6), developed new methods to solve them, and applied them to support his solutions. He forsook his prefectural duties between September 1807 and February 1808, and must have used this opportunity to write up his result (the main reason for this leave should have been to extend his Egyptological research).

In 1807 (December, 21) he presented his work to the Academy, but was rejected (the committee consisted of Lagrange, Laplace, Monge, and Lacroix; Fourier was Monge's protégé; Laplace and Lacroix were in favor, but Lagrange was adamant in his rejection especially of the 'series.').<sup>14</sup> He submitted papers to meet criticisms in 1808 and 1809. The Academy proposed a prize problem on heat diffusion (for January 6, 1812; entry by October 1, 1811), to which Fourier submitted a considerably revised and extended version of his 1807 paper in 1811 (the most notable extension was the introduction of Fourier transformation  $\rightarrow ??$ ). He won the grand prize; Laplace may have been trying to force approval of the paper past the objections of Lagrange, who did not withdraw his objections; Fourier felt it to be personal.

Here, we should understand why the heat diffusion problem was regarded as an unsolved problem of his time.<sup>15</sup> The major stumbling block seems to have been Newton's law of cooling ( $\rightarrow ??$ ) (at distance). Biot (of the Biot-Savart law) studied the cooling of a thin rod with heat conduction. The rod loses heat to the ambient space (at 0 temperature) according to Newton's cooling law. Biot reasoned as follows: the external loss of heat from a point is, according to Newton  $-hT$ , where  $h$  is the external coefficient of conductivity, and  $T$  is the temperature. The heat gained by the point is the difference of two temperature differences on the left and right, so  $Kd^2T$ , where  $K$  is the internal heat conductivity. In the steady state  $Kd^2T - hT = 0$ . Biot must have found it impossible to find the missing  $dx$ 's. Biot sent his paper to Fourier in 1804. Unlike Biot Fourier took a genuinely continuous view of diffusion as flow through the rod. Thus the external loss should be  $-hTdx$  and the internal conduction result is  $Kd^2T$ . Still there is a mismatch. Fourier argued in his 1805 draft that  $K$  should be replaced by  $K/dx$  because the facility of conduction increased as the width of the sections decreased. With this ad hoc argument he produced a consistent relation  $Kd^2T/dx^2 - hT = 0$ . The next is the non-stationary problem. He correctly reasoned to obtain

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - hT. \quad (2.13)$$

Straightforwardly extending this argument, he obtained the equation for a solid:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T - hT. \quad (2.14)$$

However, by the time of the 1807 paper he realized that the term  $-hT$  had to be removed, that was there due to a careless mistake (the surface effect should not affect the bulk); Fourier realized that the surface equation and the bulk equation had to be handled separately.

Eventually he published an enlarged version in the form of a book *Theorie analytique de la chaleur* in 1822, which he started to write in 1813, but was dramatically disturbed by some political turmoil (he published a summary of his future book in 1816, saying the publication of the book is ready); Napoleon abdicated in 1814. Fourier was a prominent Bonapartist, but he was protected by the local aristocracy due to the integrity of his conduct as a prefect.

---

<sup>14</sup> This manuscript was published for the first time in 1972: I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier 1768-1830* (MIT Press).

<sup>15</sup> This is a summary of Grattan-Guinness p84-86 and p109-110.

During the “Hundred Days” he resigned on June 1 from his new position as the prefect of Rhône, protesting the severity of the regime (especially the orders of Carnot, Sadi Carnot’s father). He went to Paris hoping of resuming his academic life, but on June 18 the battle of Waterloo ended the Napoleonic era. Under the Bourbon monarchy he had little chance of employment or even recognition; this was the lowest point of his life.

After this he became the director of statistics bureau of Seine with a modest salary and plenty of time for research in 1815. In May 1817 his election to be an academician was secured by the navy minister Dubouchage (elected in 1818<sup>16</sup>). He was elected permanent mathematics secretary of the Academy in 1823.<sup>17</sup>

Fourier had to face the rivalries with Cauchy and Poisson. For example, Cauchy published in 1817 Fourier’s integral theorem

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f(y) \cos qy dy \right] \cos qx dq \quad (2.15)$$

with an excited tone of newly discovered work; when Fourier pointed out his priority, Cauchy published an acknowledgement in the following year. Fourier seems to have kept as much as possible out of the battle that raged between Poisson and Cauchy. Fourier’s ideas were taken up by Dirichlet soon after.

Operator calculus was Fourier’s last major mathematical achievement. Let  $D \equiv \partial/\partial x$ . He found the solution to

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (aD^2 - bD^4 + \dots)\psi \quad (2.16)$$

as

$$\psi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty d\mu f(y) e^{-t(a\mu^2 + b\mu^4 + \dots)} \cos(\mu(x - y)). \quad (2.17)$$

He also announced in his *Exposé synoptique* his interest in linear programming. He contributed to the development of error analysis and gave an objective account of statistical studies (against Laplace’s subjective interpretation of probability).

It should not be forgotten that Fourier’s unfulfilled projects were on the physical aspects of heat. For example, he worked with Oersted on thermoelectric effect (a joint paper published in 1823).<sup>18</sup> For Fourier, heat was heat, and he did not join the people in Paris who

<sup>16</sup> He lived from 1818 to 1829 in an apartment at 1 rue pavée St. André de Arts (now 15, rue Séguier) in the center of Paris.

<sup>17</sup> As a secretary he chose referees of the papers submitted to the Academy. In 1829 Galois sent in his first paper on the resolution of equations, which Fourier sent to Cauchy. Cauchy misplaced it, so Galois sent in the second paper in 1830, which disappeared at the time of Fourier’s death. Although Galois inquired of its whereabouts, the paper was lost; so he wrote the third paper which was returned by Poisson with the assessment “unintelligible.” Six months later Galois was killed. In October 1826 Abel submitted a masterpiece, which Fourier sent to Legendre and Cauchy: Cauchy took it but never looked at it. In this case, Jacobi saw a reference to it in Abel’s later publications and asked Legendre for it, who returned the paper to the Academy but was not published because its publication was raised to a France-Norway governmental issue. Then the paper was lost to be found only in the 1950s.

<sup>18</sup> However, he did not show any interest in Sadi Carnot’s pamphlet on thermodynamics published in 1824. He was not the only person indifferent; a chief reason seems that Carnot’s paper was regarded as another obscure work on the caloric theory of heat that had fallen into disfavor by the time of Carnot’s paper.



were interested in foundational questions of heat; he was a positivist in this respect; indeed Auguste Comte, one of the founders of the modern positivism, took Fourier's work on heat diffusion to be the paradigm and dedicated his *Cours de philosophie positive* to Fourier.

He built up a circle of devotees such as Liouville, Sturm, Dirichlet (cf. 2.5(1), 1.12(2)), and Navier.

His last five years were plagued by chronic rheumatism; possibly he had also caught malaria in Egypt. He suffered badly from insomnia and had to sleep in an almost upright position. He continued to work relentlessly despite all these conditions. He died on May 16, 1830 at his home in the rue d'Enfer. His funeral took place two days later at the Eglise St. Jacques de Haut Pas. His last days were enriched by long discussions with young Champollion fresh from Egypt, who died only two years later and was buried close to Fourier in the cemetery of St. Père Lachaise on the outskirts of Paris. Fourier should have chosen his resting place long before he died; for nearby lies his beloved master, Monge (of Monge-Ampère).

## 2.7 Green の考え：1828 年.

点  $x$  に集中している単位強さの衝撃を  $\delta_x$  と書こう。<sup>19</sup> 任意の関数  $f$  はこのような衝撃の重ね合わせと考えられる：

$$f = \sum_x f(x)\delta_x. \quad (2.18)$$

ここで  $x$  についての和は直観的に理解することにしよう。こうして  $Qu = f$  を解くには重ね合わせの原理によって  $Qu = \delta_x$  を解きさえすればよいことになる。Green はこの解  $G_x$  を導入し、それを Riemann は *Green 関数* (Green's function) と呼んだ。もとの方程式の解は

$$u = \sum_x f(x)G_x, \quad (2.19)$$

となる。

## 2.8 Who was Green?<sup>20</sup>

George Green was born in June 1793 in the village of Saxondale six miles from Nottingham. He became a pupil of a secondary school in 1801 where he studied until the summer of 1802. A 27 year old teacher, Robert Goodacre, was able to interest George in mathematics and natural science. However, his father's baker business flourished, so he had to be his father's assistant. Thus he had to educate himself: he learned Laplace's *Analytical Mechanics*, the work of Lagrange, and also a complete collection of Proceedings of the Royal Society was available. He also learned Coulomb and Poisson.

<sup>19</sup>  $\delta$ -関数を使えば ' $\delta_x = \delta(x - y)dy$ ' と書ける。

<sup>20</sup> Yu. A. Lyubimov, "George Green: his life and works (on the occasion of the bicentenary of his birthday)," *Physics-Uspokhi* **37**, 97-109 (1994).

In 1826 a public subscription library was opened in Nottingham, which helped to publish his first, largest and most important scientific work “An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism” in 1828. The edition was small and most of them were scattered among homes of his fellow subscribers. Thomson (subsequently Lord Kelvin) managed to get three copies with much difficulty less than 20 years later.

In 1829, his father died, and in 1833 Green decided to enter Cambridge. In 1837 he passed brilliantly the tripos and became a fourth wrangler, and on October 31, 1839 he was elected Fellow of Gonville and Caius, his alma mater. However, his health failed, and he died of influenza on May 31, 1841 in Sneiton (another village close to Nottingham).

### 3 多変数微分の復習

#### 3.1 偏微分.

$f(x, y)$  は領域  $D \subset \mathbf{R}^2$  で定義された実関数とし  $(a, b) \in D$  とする。もしも  $f(x, b)$  が  $x$  について  $a$  で微分可能なとき  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  において  $x$  について **偏微分可能** (partially differentiable) といわれ、その微分は  $f_x(a, b)$  と書かれる。より一般的に、もしも  $f$  が領域  $D$  で  $x$  について偏微分可能の時  $f_x(x, y)$  を

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f.$$

のように定義する。 $z = f(x, y)$  と書くときは  $f_x(x, y)$  は  $\partial z / \partial x$  と書かれる。 $f_x(x, y)$  を  $f$  の  $x$  に関する**偏導関数** (partial derivative) という。同様に  $\partial f(x, y) / \partial y$  を定義することもできる。

#### 3.2 注意.

たとえば  $f_x$  が  $f_y$  ある点で存在しても  $f$  はそこで連続とは限らない。

#### 演習.

(1) そのような実例を与えよ。

(2) もし  $f_{xy}$  が連続でなければ  $f_{xy} = f_{yx}$  とは限らない。次の関数の  $f_{xy}$  と  $f_{yx}$  を原点でくらべて見よ：

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ for } (x, y) \neq (0, 0) \quad (3.1)$$

ただし  $f(0, 0) = 0$  とする。Mathematica を使うとどういふ答が出るか？

#### 3.3 変数変換.

$f$  を  $x$  と  $t$  のたちのよい関数<sup>21</sup> で

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2)$$

を満足するものとする。ここで  $c$  は正定数である。これは一次元波動方程式である (→1.4, ??)。この式で  $\partial / \partial x$  は  $t$  を保って  $x$  で微分することを表す。ここで、独立変数を  $(x, t)$  から  $(X, Y) : X = x + ct, Y = x - ct$  に変換したい。 $\partial / \partial X$  と書くとき、この偏微分は  $Y$  を一定に保って計算される。連鎖律を使って

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}, \quad (3.3)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y} = c \frac{\partial}{\partial X} - c \frac{\partial}{\partial Y}. \quad (3.4)$$

<sup>21</sup> 「たちがいい」とは適当に滑らかで、「理論を厳密化する際に余計なことを考えなくていい」という意味である。

つまり

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right\} \quad (3.5)$$

が得られる。すなわち、波動方程式は次の形に変換される：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (3.6)$$

これは  $\partial\psi/\partial Y$  が  $Y$  のみの関数であることを意味する：

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = \phi(Y). \quad (3.7)$$

よって、 $\psi$  は  $Y$  のみの関数と  $X$  のみの関数の和で書ける。いいかえると、(3.2) のもっとも一般的な解は次の形を持つ：

$$\psi(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (3.8)$$

ここで  $F$  と  $G$  は微分可能な関数である。たとえば、 $F(x + ct)$  は  $-x$  の方向に速さ  $c$  で形を変えずに伝搬する波を表す。

### 3.4 一次元波動方程式の D'Alembert の解.

(3.2) を一次元空間全体  $\mathbf{R}$  および全時間  $t \in (0, +\infty)$  について、初期条件  $u(x, 0) = f(x)$ 、 $\partial_t u(x, 0) = g(x)$  の下で考えよう。  $f$  は  $C^2$ 、  $g$  は  $C^{122}$  とする。この解は

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (3.9)$$

で与えられる。この解は **d'Alembert の公式** (d'Alembert's formula) といわれ、  $C^2$  であり問題の唯一の解である。

[証明] (3.8) から一般解の中の関数  $F$ 、  $G$  は次のように決められる：

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad (3.10)$$

$$cF'(x) - cG'(x) = g(x). \quad (3.11)$$

(3.11) から

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\zeta) d\zeta + const, \quad (3.12)$$

が得られる。ここに  $x_0$  は勝手な基準点である。(3.11) と (3.12) から  $F$  と  $G$  を解くことが出来て

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\zeta) d\zeta \right], \quad (3.13)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\zeta) d\zeta \right]. \quad (3.14)$$

ここで (3.12) に現れた積分定数は  $x_0$  を適当に選ぶことで吸収できる。これが求めたい結果を与えている。

---

<sup>22</sup>  $C^m$  は  $m$ -回連続微分可能な関数の集合を意味する。

### 課題.

(A) d'Alembert の公式を与える方法を機械的に Laplace 方程式の初期値問題  $u(x, 0) = f(x)$ 、 $\partial_y u(x, 0) = g(x)$  に適用すると

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[f(x + iy) + f(x - iy)] - \frac{i}{2} \int_{x-iy}^{x+iy} g(s) ds \quad (3.15)$$

が得られる。この公式は、解の挙動は関数の複素平面上の性質で決まることを意味する。たとえば、 $f(x) = 1/(1+x^2)$  だとすると、解の中に（実軸の上の）初期条件によっては制御できない特異点が現れることを意味する（適切な問題ではないのである）。

(B) 強制力で駆動されている  $\mathbf{R}$  上の一次元波動方程式を解け。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = Q(x, t) \quad (3.16)$$

初期条件は  $u = f(x)$ 、 $\partial_t u = 0$  とする（変数  $x \pm t$  を使え）。

### 演習.

(A) 一次元波動方程式では、もしも初期条件が  $\mathbf{R}$  の有界集合上でのみゼロでないとすると、勝手な時刻  $t > 0$  でもその性質を持つ（→??）。

(B) 3次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (3.17)$$

の勝手な球対称解は次の形を持つ（→5.10 for  $\Delta$ , 特に (5.21); ただし、解は原点で特異点を持たないとする）:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{F(|\mathbf{x}| - ct) + F(|\mathbf{x}| + ct)}{|\mathbf{x}|}. \quad (3.18)$$

(C)

(1)  $\mathbf{R}$  上の一次元波動方程式 ( $c = 1$ ) で次の初期条件を満たす解を求めよ。

$$u_{t=0} = \cosh^{-2} x, \quad \partial_t u_{t=0} = \cosh^{-2} x \tanh x. \quad (3.19)$$

(2)  $\mathbf{R}$  上の一次元波動方程式 ( $c = 1$ ) で次の初期条件を満たす解を求めよ。

$$u_{t=0} = 0, \quad \partial_t u|_{t=0} = A \operatorname{sech} x. \quad (3.20)$$

(3) 初期変位測度 0 の条件下次の初期変位を持つ一次元波動方程式の解をスケッチせよ。

(D) 一般解をもとめよ。

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x \cos t. \quad (3.21)$$

(2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x - t). \quad (3.22)$$

これらの問題は斉次方程式（強制項のない式）の一般解に非斉次方程式の一つの解を加えることで解ける。

### 3.5 境界のある波動方程式.

一次元波動方程式の**初期値問題**を  $[0, L]$  で考えよう。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty). \quad (3.23)$$

初期条件は

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x), \quad \text{for } t = 0, \quad x \in [0, L] \quad (3.24)$$

とする。ここで  $f$  は二階微分可能  $g$  は一階微分可能であり、境界  $x = 0$  および  $x = L$  においてすべての時間  $t > 0$  で  $u = 0$  であるとする。この場合、境界条件は (3.8) からすべての  $t > 0$  において  $F(-ct) + G(ct) = 0$  および  $F(L - ct) + G(L + ct) = 0$  を意味する。したがって、 $F(x) = -G(-x)$ 、 $F(x + L) = -G(-x + L)$ <sup>23</sup> でなくてはならない。**3.4** から

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[ f(x + ct) - f(-x + ct) + \frac{1}{c} \int_{-x+ct}^{x+ct} g(\zeta) d\zeta \right]. \quad (3.25)$$

が得られる。 $F(x) = F(x + 2L)$  であることに注意、つまり  $F$  は周期  $2L$  の周期関数である。

以下の例を見よ。

### 3.6 並進座標系.

$c$ 、 $D$  を正定数として次の方程式を考えよう：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3.26)$$

もしも  $c = 0$  であればこれは一次元拡散方程式である。この方程式を並進座標系  $X = x - ct$  で書き換えよう（つまり速度  $c$  で  $x$  の正の方向に動く座標に乗ってこの方程式が記述する系

---

<sup>23</sup>  $F(x) = -G(-x + 2L) = F(x + 2L)$ 。

を眺めよう) 最も簡単な方法は  $t$  と  $X$  を独立変数にすることである。混乱を避けるため新たな時間座標  $T = t$  を導入しよう。こうして

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}. \quad (3.27)$$

これで (3.26) の意味は明瞭である: 正の  $x$  方向に速度  $c$  で移流する (advected) 拡散方程式である。

### 演習.

(A) 次の方程式を並進座標  $X = x - vt$  を使って書き換え一般解を求めよ。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = F(x - vt), \quad (3.28)$$

ここに  $F$  はたちのよい関数とする。

(B) 次の (もともとの) Fisher 方程式を考える (この型の方程式は非線形拡散方程式とか反応拡散方程式といわれパタン形成を論じるために重要な方程式群である):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi(1 - \psi). \quad (3.29)$$

(1) 速度  $v$  で並進する座標系でこれを書き換えよ。

(2) 速度  $v$  で定常的に伝搬する波面 (moving front) を支配する方程式を求めよ。

(3) 十分大きな  $v$  についてはゼロでない解があることをどうやって示せるか?. [ヒント: (2) で導いた式をポテンシャルの中で運動する粒子の古典力学の式と考えて見よ。ただし、減衰力が働いている。]

## 4 ベクトル解析のまとめ

### 4.1 勾配.

$f: D \rightarrow \mathbf{R}$  を領域  $D \subset \mathbf{R}^2$  で定義されている充分滑らかな関数とする。 $f(P)$  を島  $D$  の上の位置  $P$  の海拔高度と考えてみよう。地形は充分滑らかだと考えているから  $D$  の各点で (地形が水平でない限り) もっとも急勾配の方向  $\mathbf{n}$  (登る方向を向く) が決まる。さらにその傾きの大きさ  $s(>0)$  も決まる。つまり、 $D$  の各点で **勾配 (勾配ベクトル)** (gradient)  $s\mathbf{n}$  (水平の時は  $s=0$ 、ゼロベクトルとする) が決まる。これを  $\text{grad } f$  (cf. 4.3) と書く。

**演習.** 勾配  $\text{grad}(r^{-2})$  を計算せよ。

### 4.2 $\text{grad } f$ の座標表現.

座標系を導入しなくても  $\text{grad } f$  にはちゃんとした意味がある (つまり, この概念は座標系に依存しない) が、実際の計算には座標系を導入するのが便利なのは多い。3次元空間での勾配は直交座標系  $O\text{-}xyz$  を導入すると

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (4.1)$$

あるいは

$$\text{grad } f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4.2)$$

と書ける。

**演習.** 勾配  $\text{grad}(fg)$  を計算せよ。

### 4.3 ナブラ.

(4.2) は  $\text{grad}$  が微分可能な関数  $f$  を各点で勾配に写像する作用素とであることを示唆している。この線形作用素を (→2.2)  $\nabla$  と書いて **ナブラ** (nabla、しかし、アメリカではめったにこうは呼ばず  $\text{del}$  という)<sup>24</sup> と呼び、 $\text{grad } f = \nabla f$  と書く。したがって、 $\nabla$  は直交座標系では次の微分作用素と考えてよい:

$$\nabla \equiv \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (4.3)$$

ただし、 $x_k$  は第  $k$  座標で  $\mathbf{e}_k$  は  $k$ -座標方向の方向ベクトルである。

---

<sup>24</sup> ‘ナブラ’ とはアッシリアの豎琴のことだそうである。



#### 4.4 発散.

流れの場（流れの量と方向を各点で示すベクトル場） $\mathbf{u}$  が領域  $D \in \mathbf{R}^3$  にあるとしよう。表面要素  $d\mathbf{S}$  で覆われた点  $P$  を含む凸領域（ $P$  を中心とする球あるいは立方体と考えていい） $V$  をとろう（ $d\mathbf{S}$  は外向き法線を持ち大きさが  $|d\mathbf{S}|$  のベクトル）。このとき、 $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  は単位時間内にこの面積要素を通して外に出ていく（入ってくるものはマイナスがでると考える）流体の体積である。そこで次の面積分

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \quad (4.4)$$

は領域  $V$  から失われる流体の総量になる。もしも次の極限が存在すれば、それを点  $P$  におけるベクトル場  $\mathbf{u}$  の**発散** (divergence) という：

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{|V|}. \quad (4.5)$$

ここで、極限は  $V$  の列がすべて  $P$  を含む入れ子になっているようにとる。定義から明らかなように、 $\operatorname{div} \mathbf{u}$  は流れの場  $\mathbf{u}$  のために単位時間単位体積あたりに  $P$  が失う流体の量（つまり失われる流体密度）を表す。

#### 4.5 $\operatorname{div}$ の直交座標表現.

(4.5) から、極限の存在を仮定すると発散の直交座標表現は簡単に求まる。 $V$  として各面が座標軸方向と直交している小さな立方体をとろう。ただちに

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4.6)$$

が得られる。

#### 4.6 作用素 $\operatorname{div}$

(4.6) はベクトル場を関数に写像する線形微分作用素  $\operatorname{div}$  (→2.2) を導入するのが好都合なことを示している。(4.3) と (4.6) を較べて

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.7)$$

と書くことが出来る。これは、ナブラの「濫用」であって、直交座標系でしか使ってはならない。 $n$  次元空間への拡張は自明だろう。

**演習.**  $\operatorname{div}(\mathbf{r}/r)$  を計算せよ。

#### 4.7 回転.

$\mathbf{u}$  は 4.4 におけると同様なベクトル場とする。3次元空間内の単連結<sup>25</sup> で有界な（コンパクトな）表面  $S$  でその境界が滑らかなものを考える。この面の境界を  $\partial S$  と書く（ここでこの境界には右ねじの法則に一致した向きがつけられているとする）。 $\partial S$  に沿った次の線積分を考える：

$$\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.8)$$

ここで  $d\mathbf{l}$  は境界に沿った線積分要素である。

次の極限が存在するとき  $\text{curl} \mathbf{u}$ （日本ではよく  $\text{rot} \mathbf{u}$  と書かれる）をベクトル場  $\mathbf{u}$  の回転 (curl) という：

$$\mathbf{n} \cdot \text{curl} \mathbf{u} = \lim_{|S| \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}}{|S|}. \quad (4.9)$$

ここで極限は点  $P$  を中心に、その法線方向（右ねじの方向で決める）が  $\mathbf{n}$  で、入れ子になって半径がゼロに収束する円板の列（あるいは対角線がゼロに収縮する正方形の列）についてとる。

#### 4.8 回転の直交座標表示.

(4.9) の極限が存在するならば  $\text{curl} \mathbf{u}$  の座標表現を求めるのはやさしい（各軸に直交する正方形で考えよ）：

$$\text{curl} \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (4.10)$$

あるいは

$$\text{curl} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (4.11)$$

ただし、ナブラのこの「濫用」は直交座標系でしか許されない。

繰り返される添字については和をとるという規約の下で

$$(\text{curl} \mathbf{u})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j u_k, \quad (4.12)$$

と書ける。ここで  $\epsilon_{ijk}$  は  $\epsilon_{123} = 1$ 、 $\epsilon_{ijk} = \text{sgn}(ijk)$ 、ただし  $\text{sgn}(ijk)$  は置換の符号である：もしも  $(ijk)$  が  $(123)$  から偶数回の互換（2 数字を入れ替える操作）でえられるときは  $+1$ 、そうでないときは  $-1$ <sup>26</sup>。ベクトル積についての次の表現に注意：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (4.13)$$

便利な公式は（繰り返し添字については和をとること！）

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{abk} = \delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja} \quad (4.14)$$

<sup>25</sup> 領域が単連結 (singly connected) であるとは、その中の 2 点を領域内で結ぶ勝手な二つの曲線は領域内で一方から他方に連続的に変形できること。

<sup>26</sup> たとえば、 $(213) = -1$ , and  $(312) = +1$ 。

である。<sup>27</sup>

#### 演習.

- (1) ベクトル場  $\mathbf{v} = (x^2z, -xy^3z^2, xy^2z)$  について各点でその発散と回転を計算せよ。  
(2) 次の公式を示せ。

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (4.15)$$

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{v}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{v} + f \operatorname{curl} \mathbf{v}. \quad (4.16)$$

- (3) 次の式を計算せよ：

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}/r^3). \quad (4.17)$$

- (4) 次の公式を示せ。

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mathbf{u}. \quad (4.18)$$

ただしベクトルに施されたラプラス作用素の意味については 4.11 を見よ。

### 4.9 ポテンシャル場、ポテンシャル、ソレノイド場、うずなし場.

もしもベクトル場  $\mathbf{u}$  が  $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi$  のようにある関数  $\phi$  の勾配として書けるとき、この場はポテンシャル場（保存場）(potential field) といわれ、 $\phi$  はポテンシャル (potential) といわれる。発散がない ( $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ) 場は **ソレノイド場** (solenoidal field)、回転がない ( $\operatorname{curl} \mathbf{u} = 0$ ) 場は **渦なし場** (irrotational field) と呼ばれる。

### 4.10 ラプラス作用素、調和関数.

ラプラス作用素 ( $\rightarrow 1.2$ )  $\Delta$  は次のようにも定義できる

$$\Delta f \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} f \quad (4.19)$$

このためしばしば  $\Delta = \nabla^2$  と書かれる。ラプラス方程式  $\Delta f = 0$  を領域  $D$  で満たす関数  $f$  は  $D$  上の**調和関数** (harmonic function) といわれる。われわれのラプラス作用素の直観的理解によればそれは空間的移動平均の下で不変な関数である ( $\rightarrow ??-??$ )。したがって、直観的に明らかなように、調和関数は局所極大や極小値を持たない。下に二例図示しておく。

---

<sup>27</sup> これを証明するもっともやさしい方法は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{abk} = A_{ijab}\delta_{ij}\delta_{ab} + A_{iajb}\delta_{ia}\delta_{jb} + A_{ibja}\delta_{ib}\delta_{ja},$$

ともっとも一般的な式を書いておいて係数を決めていくことであろう。

#### 4.11 ベクトル場に作用するラプラス作用素

直交座標系で形式的に計算すれば  $\text{curl curl } \mathbf{u}$  ( $\rightarrow(4.18)$ )

$$\text{curl curl } \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.20)$$

が得られる。 $\nabla$  をベクトルに見立てた計算は直交座標系でしか許されないので、この結果は直交座標系でしか正しくない。特に、 $\nabla^2 \mathbf{u} = (\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z)$  は直交座標系でしか意味がない。しかし、残りの二つの項は特定の座標系によらずに意味がある。そこで  $\Delta \mathbf{u}$  を次のように定義する：

$$\Delta \mathbf{u} \equiv \text{grad div } \mathbf{u} - \text{curl curl } \mathbf{u}. \quad (4.21)$$

#### 4.12 定理 [Gauss-Stokes-Green の定理]. 発散と回転の定義から ( $\rightarrow 4.4, 4.7$ )<sup>28</sup>

(1) Gauss の定理

$$\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{u} \, d\tau, \quad (4.22)$$

ただし、 $V$  は 3 次元空間の領域で  $d\tau$  はその体積要素である。

(2) Stokes の定理<sup>29</sup>

$$\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.23)$$

ただし、 $S$  は 3 次元空間中のコンパクトな曲面である。

(3) 2 次元空間では Stokes の定理は Green の定理になる

$$\int_{\partial D} (u dx + v dy) = \int_D \left( -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy, \quad (4.24)$$

ただし、 $u$  と  $v$  は  $x$  の  $y$  微分可能な関数とする。

演習.<sup>30</sup>

<sup>28</sup> ここで以下に出てくる境界  $\partial V$ ,  $\partial S$  および  $\partial D$  は十分に滑らかでベクトル場は区分的に  $C^1$  とする。

<sup>29</sup> George Gabriel Stokes, 1819-1903.

<sup>30</sup> 深谷賢二, 電磁場とベクトル解析 (岩波 1995), p98.

(A)

(1)  $S = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + y^2 + z = 1, -3 \leq z\}$  とし  $\mathbf{v}(x, y, z) = (3xy + 7y + x, y, z + 3)$  とする。  $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  を計算せよ。

(2)  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 4z^6 = 4, 0 \leq z\}$  とし  $\mathbf{v}(x, y, z) = (e^y, z, x^2)$  とする。  $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  を計算せよ。

(B) Green の公式 (4.24) を証明せよ。 .

#### 4.13 Poincaré の補題. (Poincaré's lemma) <sup>31</sup>

- (1)  $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{A} = 0$ ,
- (2)  $\operatorname{curl} \operatorname{grad} \phi = 0$ .

[略証]  $V$  を  $\mathbf{R}^3$  中のコンパクト領域出、その境界  $\partial V$  は充分滑らかとする。  $\partial^2 V = \emptyset$  に注意。そこで Gauss-Stokes-Green の定理 ( $\rightarrow$  4.12) を使うと

$$\int_V d\tau \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \int_{\partial V} \operatorname{curl} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial^2 V} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (4.25)$$

(2) を示すには境界が充分滑らかな面  $S$  をとって、Stokes の定理と勾配の定義を使う:

$$\int_S \operatorname{curl} \operatorname{grad} \phi \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \operatorname{grad} \phi \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (4.26)$$

#### 4.14 微分形式.

Notice that these relations are due to the topologically trivial fact that the boundary of a boundary is an empty set ( $\partial^2 V = \emptyset$ ). These are examples of the general formula  $d^2\omega = 0$ , where  $\omega$  is a *differential form*. I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry* (Scott, Foresman and Company, 1967) is strongly recommended. B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge UP, 1980) is less modern, but may still be good for physicists who are not interested in elegance and depth of mathematical ideas. The Gauss-Stokes-Green theorem has the following unified expression

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (4.27)$$

where  $M$  is an orientable  $n$ -manifold (which must be sufficiently smooth), and  $\omega$  is a differential form. Notice that this is a natural extension of the fundamental theorem of calculus:

$$\int_{[a,b]} df = f(b) - f(a) (= \int_{[a],[b]} f). \quad (4.28)$$

Poincaré's lemma  $d^2\omega = 0$  follows from  $\partial^2 M = \emptyset$ .  $d$  and  $\partial$  are, in a certain sense, dual (Good symbols reveal deep relations. This duality is the duality between cohomology and homology. The references cited above will tell the reader about this a bit.).

---

<sup>31</sup> Henri Poincaré, 1854-1912.

#### 4.15 Poincaré の補題の逆.

- (1) ベクトル場  $\mathbf{F}$  が単連結な向き付け可能な領域で渦なし (つまり、 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ ) ならば、 $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi$  を満たすポテンシャル  $\phi$  がある。  
 (2) もしベクトル場  $\mathbf{F}$  が単連結な向き付け可能な領域でソレノイド場 (つまり  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ ) ならば、 $\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$  を満たすようなベクトルポテンシャル (vector potential) がある。□  
 [(1) は計算で簡単に示せる。]

#### 演習

(A) ヒント：頭のいい方法はない。うまく当てて見よ。

- (1) 次の3次元空間中のベクトル場はベクトルポテンシャルを持つことを示し、それを求めよ。

$$\mathbf{v} = (e^y - x \cos(xz), 0, z \cos(xz)). \quad (4.29)$$

- (2) 次の3次元空間中のベクトル場は (スカラー) ポテンシャルを持つことを示し、それを求めよ。

$$\mathbf{v} = (y^2 \sin z, 2xy \sin z, xy^2 \cos z). \quad (4.30)$$

- (3) 次の3次元空間中のベクトル場のベクトルポテンシャルを求めよ。  $\mathbf{v} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 0)$ .

- (4)  $\mathbf{v} = f(r)\mathbf{r}$  のポテンシャルを求めよ。

#### 4.16 ベクトル解析の諸公式.

- (1)  $\operatorname{grad} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{curl} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{curl} \mathbf{B}$ .  
 (2)  $\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \operatorname{curl} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \operatorname{curl} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .  
 (3)  $\operatorname{curl} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ .  
 特に、 $\mathbf{A}$  が定ベクトルだと  $\operatorname{curl} (\mathbf{A} \times \mathbf{r}/2) = \mathbf{A}$  となる。  
 (4)  $(\mathbf{C} \cdot \nabla) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ .  
 (5)  $\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ .  
 (6)  $\operatorname{div} (\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g) = 0$ .

#### 演習.

上記すべての公式を示せ。

$\operatorname{curl} (\mathbf{A} \times \mathbf{r}/2) = \mathbf{A}$  は  $\mathbf{A}$  が定ベクトルの時しか成り立たないが、もしそうでないときはどうなるか。

## 5 曲線座標系まとめ

### 5.1 曲線座標系, 計量テンソル.

3次元空間に於けるある座標系の役割はその各点に数の三つ組み  $(q^1, q^2, q^3)$  を一義的に割り当てることである。そうするとある点の直交座標  $x^1, x^2, x^3$  は  $q^1, q^2, q^3$  の単射な<sup>32</sup> 関数になる。 $(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$  で  $(q^1, q^2, q^3)$  から無限小離れた点の座標を表すことにすれば、この二点間の距離  $ds$  は次の二次形式で書けるだろう：

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq^i dq^j, \quad (5.1)$$

ここで

$$g_{ij} \equiv \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}, \quad (5.2)$$

は**計量テンソル** (metric tensor) と呼ばれる。

### 5.2 Riemann 幾何学.

The Riemann geometry ( $\rightarrow$ 5.3) is the geometry determined by the metric tensor. M. Spivac, *Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979), vol. II, Chapter 4 contains Riemann's epoch-making inaugural lecture (English translation) with a detailed mathematical paraphrase of the lecture, "What did Riemann say?". According to Dedekind,<sup>33</sup> Gauss ( $\rightarrow$ ??) sat at the lecture which surpassed all his expectations, in the greatest astonishment, and on the way back from the faculty meeting he spoke to Wilhelm Weber (Riemann's lifelong patron), with the greatest appreciation, and with an excitement rare for him, about the depth of the idea presented by Riemann.

Read for a nice introduction to Riemann geometry an overview by Kazdan in Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 339 (1996).

### 5.3 Who was Riemann?<sup>34</sup>

Georg Friedrich Bernhard Riemann was born on September 17, 1826 in a small village on the Elbe near Lüneburg. He was the second of six children of a poor pastor. He was educated by his father before he entered the gymnasium. When he was fourteen, he lived with his grandmother in Hanover and entered the third grade of the gymnasium there. After his grandmother died, he transferred to the second grade of a gymnasium in Lüneburg in April, 1842. The principal of the school recognized his mathematical genius and lent his math books. Riemann always returned the books within a couple of days, so the principal was surprised but found that Riemann understood them. He became familiar with Euler's work in those days.

<sup>32</sup> つまり、 $q^1, q^2, q^3$  に対応した  $x^1, x^2, x^3$  は一つしかない。

<sup>33</sup> Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831-1916.

<sup>34</sup> Mainly based on K. Kobori, *Great Mathematicians of the 19th Century* (Kobundon, 1940).

He entered University of Göttingen in April, 1846 as a Linguistics and Theology major to get a job as quickly as possible to support his parents and siblings. He also attended Gauss' lectures on the least square method. His desire to study mathematics became irrepressible, and he finally asked for his father's permission to switch his major. In those days Gauss was about 70, and gave only a few applied mathematics courses, so he was disappointed and moved to the University of Berlin in 1847.

In Berlin, Jacobi (algebra and analytical mechanics), Dirichlet (number theory, integration theory, PDE), Steiner, and other professors gave lectures on their new results. Dirichlet aimed at logical rigor and avoided calculations as much as possible. This style met Riemann's taste.

In the spring of 1849, he returned to Göttingen, and was attracted to Weber's experimental physics course. Weber recognized his genius and became his patron. Riemann did not get any direct instruction from Gauss, but was strongly influenced by the atmosphere created by the great mathematician. For example, Riemann accepted the idea of 'ether' which Gauss also had.

In November 1851, he submitted his thesis entitled, The foundation of general theory of functions of one complex variable. He defined holomorphic functions in terms of the Cauchy-Riemann equation. The idea of conformal maps was also conceived. He also introduced Riemann surfaces. Gauss praised the thesis: Mr. Riemann's thesis clearly tells us that his study is thorough, that he has a sharp brain, and that he has a magnificent and rich creativity. From every point, the thesis is a precious accomplishment and far surpasses the standard of doctoral theses. When Riemann visited Gauss after the exam, Gauss told him that he had similar thoughts, and that he had a similar aim.

He next started preparation for the Habilitation paper. He chose to study Fourier series ( $\rightarrow 9$ ), but this was not an easy task. Fortunately, Dirichlet visited Göttingen, who checked Riemann's manuscript together, and "Professor Dirichlet gave me detailed suggestions with kindness I could not imagine when I took into account the difference of our social statuses. I pray Professor will remember me forever." (from a letter to his father). He submitted his paper, The expressibility of functions by trigonometric series, in December 1853. The Riemann integration appeared for the first time in this paper ( $\rightarrow 2.5(3)$ ). In those days he was an assistant of Weber.

The famous Habilitations exam was held on June 10, 1854. He introduced (1) the concept of manifold, (2) a new definition of distance through the quadratic form, and (3) the concept of curvature.<sup>35</sup>

He became a lecturer in 1854. His first lecture was on PDE and its applications to physics. He had eight students ("I am glad that I have so many students." (from a letter to his father)). In 1855, Dirichlet succeeded Gauss. Dirichlet made effort to make Riemann an associate professor, but failed. He finished his study of elliptic functions which was started in ca. 1851. His lecture on elliptic functions attracted only three participants including Dedekind. He became an associate professor on January 9, 1857.

---

<sup>35</sup> This is a generalization of Gauss's curvature, but the new aspect was to write it in terms of the metric tensor.



In 1857 he completed “On the number of prime numbers less than a given number.” He introduced the zeta function

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (5.3)$$

and conjectured that all the zeros in the strip  $0 < \operatorname{Re} s < 1$  are on  $\operatorname{Re} s = 1/2$  (the Riemann conjecture). With Dedekind, he is the founder of analytic number theory. Dirichlet died on March 9, 1859. Riemann became a full professor on July 30, 1859. He got married on June 3, 1863 with his sister’s friend Elise Koch, but this was his last happy period. He became ill in August. Weber persuaded the government to support his stay in Italy to recover his health. He had a wonderful time in Italy, befriending Italian mathematicians, Betti, Beltrami, and others.

His health never recovered fully, and in June 15, 1866, he went on his third Italian trip to rest at Selasca on Lake Maggiore. He died there in July, 1866.

#### 5.4 直交曲線座標系.

各点  $(q^1, q^2, q^3)$  で、第  $i$ -座標に接する方向を第  $i$ -座標方向ということにしよう (たとえば第二座標方向とは  $(q^1, q^2 + dq^2, q^3) - (q^1, q^2, q^3)$  に平行な方向である)。各点ですべての座標方向が直交するときその座標系は **直交曲線座標系** (orthogonal curvilinear coordinate system) といわれる。このとき計量テンソルは各点で対角行列になる：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

ここで

$$h_i = \sqrt{\sum_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial q^i} \right)^2}. \quad (5.5)$$

#### 5.5 円筒座標系.(cylindrical coordinates)

$(q^1, q^2, q^3) = (r, \varphi, z)$  と書き

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.5) から  $h_1 = 1$ 、 $h_2 = r$ 、 $h_3 = 1$ 。

#### 5.6 球座標系. (spherical coordinates)

$(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, \varphi)$  と書き

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

(5.5) から  $h_1 = 1$ 、 $h_2 = r$ 、 $h_3 = r \sin \theta$ 。

### 5.7 曲線座標系で表現した勾配.

$\theta_i = 0$  あるいは 1 として、頂点が  $(q^1 + \theta_1 dq^1, q^2 + \theta_2 dq^2, q^3 + \theta_3 dq^3)$  にあるような直方体を考える。その辺の長さは  $|h_1 dq^1|$ ,  $|h_2 dq^2|$ , そして  $|h_3 dq^3|$  よりなる。勾配の幾何学的定義 (→4.1) により

$$(\text{grad } \phi)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1}, (\text{grad } \phi)_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2}, (\text{grad } \phi)_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \quad (5.8)$$

が得られる。ここに、1, 2, 3 は第 1, 2, 3-座標方向をそれぞれ意味する。

#### 演習.

球座標系において次の関係式を示せ。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (5.11)$$

### 5.8 直交曲線座標による体積要素.

上の考察から、体積要素 (volume element)  $d\tau$  は当然

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3 \quad (5.12)$$

で与えられる。

**演習.** 円筒および球座標系で体積要素を求めよ。

### 5.9 直交曲線座標による発散および回転.

これらの量の幾何学的定義から (→4.4, 4.7)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q^2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q^3} (h_1 h_2 A_3) \right], \quad (5.13)$$

$$(\text{curl } \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q^3} (h_2 A_2) \right] \quad (5.14)$$

が得られる。ただし、 $(\text{curl } \mathbf{A})_2$  と  $(\text{curl } \mathbf{A})_3$  は (5.14) の添字を巡回置換することで得られる。これらの公式において  $A_i$  はベクトル  $\mathbf{A}$  を第  $i$ -座標に投影したときの実際の長さである。

**演習.**

(1)  $\mathbf{e}_r$  を球座標系において動径方向の単位ベクトルとして、 $\mathbf{A} = r^2 \mathbf{e}_r$  の発散および回転を求めよ。円筒座標系ではどうか。

(2) 球座標系では

$$\text{curl} \left( \frac{\cot \theta \mathbf{e}_\varphi}{r} \right) = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}. \quad (5.15)$$

となることを示せ。

### 5.10 直交曲線座標でのラプラス作用素.

(5.8) と (5.13) を合わせると、ラプラス作用素  $\Delta \equiv \text{div grad}$  は

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right] \quad (5.16)$$

であることがわかる。

円筒座標系では

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.17)$$

ここで

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (5.18)$$

であることに注意。

球座標系では

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L^2 \quad (5.19)$$

ただし、

$$L^2 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (5.20)$$

ここで

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \quad (5.21)$$

であることに注意。

## 6 準線形一階偏微分方程式と同次方程式

### 6.1 準線形一階偏微分方程式.

$f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) および  $g$  を  $x_1, \dots, x_n$  と  $u$  の連続関数とすると

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = g \quad (6.1)$$

は **準線形一階偏微分方程式** (quasilinear first order PDE) と呼ばれる。それは偏微分係数の一次結合なので「線形」といわれるが、 $f_i$  や  $g$  が  $u$  に依存してもいいので「準」がつくのである。物理学者の意味では、もしも  $f_i$  が  $u$  に依存すれば非線形方程式である。

### 6.2 典型的な例.

非圧縮流体の流れの場合 (つまり速度の場合  $\mathbf{v}$ ) が与えられているとしよう。連続の式 (つまり質量保存の法則) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho \quad (6.2)$$

と書ける。これは典型的な準線形一階偏微分方程式である。その物理的な意味から、もしも  $\rho_{t=0}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$  であれば、 $\mathbf{r}(t)$  を時刻  $t = 0$  に  $\mathbf{r}$  を出発した流れに乗った (質量の無視できる) 粒子の時刻  $t$  での位置とすると、いいかえると初期条件  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}$  のもとでの

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (6.3)$$

の解とすると、 $\rho(t, \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}(t))$  となる。

### 6.3 二変数の場合.

次の準線形方程式をかんがえよう：

$$f(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y, z), \quad (6.4)$$

ここで  $f, g$  および  $h$  は  $x, y, z$  の行儀のよい関数とする。<sup>36</sup> この方程式を解くとは (6.4) が成立するような  $x, y$  および  $z$  の関係を探ることである。欲しいのはそのうえで (6.4) が成り立つような  $z = H(x, y)$  と式で書ける二次元曲面  $S$  である。 $(x, y, z)$  と  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  の両方がこの曲面上にあるとしよう。

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, -1 \right) \cdot (dx, dy, dz) = 0, \quad (6.5)$$

でなくてはならない。つまり  $\mathbf{n} = (\partial z / \partial x, \partial z / \partial y, -1)$  は曲面  $S$  の法線ベクトルである。(6.4) が言っていることは  $\mathbf{n}$  とベクトル  $(f, g, h)$  は直交しているということだ。したがて、(6.4)

<sup>36</sup> 「行儀がいい」 (Well-behaved) とは「たちがいい」と同じこと。

を解くということは接ベクトルが  $(f, g, h)$  であるような曲面  $z = H(x, y)$  を探すことにあた  
る。接ベクトルが  $(f, g, h)$  で与えられる曲面は

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{h} \quad (6.6)$$

を満たさなくてはならない。この方程式を (6.4) の**特性方程式** (characteristic differential equation) と呼ぶ。(6.6) の解を **特性曲線** (characteristic curve) という。

今の例では (6.6) は連立した二つの常微分方程式と解釈でき、その一般解は

$$F_1(x, y, z) = c_1, \quad F_2(x, y, z) = c_2, \quad (6.7)$$

のように二つの積分定数  $c_1, c_2$  を使って書ける。それぞれは二次元曲面を決めることになる。そして、その二つの曲面が交わるところに出来る曲線が特性曲線である。その曲線はこれら二つのパラメタで決まる。そこで  $c_1$  と  $c_2$  を変化させると曲線も空間中を動くことになる。そこでもしも  $c_1$  と  $c_2$  の間にある関数関係があると、たとえば  $c_1$  を変えると ( $c_2$  は  $c_1$  に隷属して変化する) 一つの曲面が描かれることになる。つまり、接ベクトルが  $(f, g, h)$  であるような曲面は、勝手な行儀のよい関数  $G$  を使って

$$G(F_1, F_2) = 0 \quad (6.8)$$

と書けることになる。これが求めたかった一般解である。

#### 6.4 準線形一階偏微分方程式の解法：特性曲線の方法.

(6.1) の特性曲線は

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{g} \quad (6.9)$$

で与えられる。これ (実は  $n$  個の連立した常微分方程式) を解くと (6.7) にあたる  $n$  個の解が求まる (都合のよい組み合わせを取ればいい)：

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u) = c_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (6.10)$$

これから (6.1) の一般解は勝手な行儀のよい関数  $G$  をとって

$$G(F_1, F_2, \cdots, F_n) = 0 \quad (6.11)$$

で与えられることになる。

この方法は Leibniz (November, 1695) による。

#### 6.5 斉次の場合.

もしも (6.1) で  $g = 0$  の時は、(6.9) の中の  $du/g = du/0$  は  $u = \text{const}$  と解釈する。つまり、(6.10) の中のひとつは  $u = \text{const}$  と考えていい。そこで一般解は

$$u = G(F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}) \quad (6.12)$$

とかける。ここで  $F_1, \dots, F_{n-1}$  は (6.10) の残りの  $n-1$  個の関係である。

**課題. [完全積分].**

独立変数と同じ数だけの任意定数を含む解は一階偏微分方程式の **完全積分** と呼ばれる。<sup>37</sup> もしこのような解が有れば一つの任意の関数  $w$  に依存する解を次のように作ることが出来る： $a_n = w(a_1, \dots, a_{n-1})$  であるとし、 $u(x, a_1, \dots, a_{n-1}, w(a_1, \dots, a_{n-1}))$  の包絡面を作る、つまり次の方程式を作る：

$$u_{a_1} + u_{a_n} w_{a_1} = 0, \quad (6.13)$$

$$\dots, \quad (6.14)$$

$$u_{a_{n-1}} + u_{a_n} w_{a_{n-1}} = 0. \quad (6.15)$$

これから  $n-1$  個のパラメタを  $x$  の関数として解いて  $u$  に入れると求めている解になる。しかし、この方法が、特性曲線の方法で求められる解すべてを尽くす保証はないことに注意せよ。

(2) たとえば

$$u = ax + by + \sqrt{1 - a^2 - b^2}z + c \quad (6.16)$$

は  $(\text{grad } u)^2 = 1$  の完全積分である。

## 6.6 例.

(1)(6.2) の特性方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{d\rho}{0}, \quad (6.17)$$

つまり、(6.3) と  $d\rho = 0$  ( $\rightarrow$  6.5) である。したがって、6.2 の  $\rho(t, \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}(t))$  が正当化される。

(2)

$$(bx - ay) \frac{\partial f}{\partial x} + (ax + by - 1) \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (6.18)$$

この特性微分方程式 ( $\rightarrow$  6.4) は

$$\frac{dx}{bx - ay} = \frac{dy}{ax + by - 1} = \frac{df}{0} \quad (6.19)$$

これを解いて ( $\rightarrow$  1.18) 次の一般解が求まる (cf. 6.5)

$$f(x, y) = G \left( \frac{b}{a} \arctan \frac{y - \beta}{x - \alpha} - \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left( \frac{y - \beta}{x - \alpha} \right)^2 \right] - \log(x - \alpha) \right) \quad (6.20)$$

ここで  $\alpha \equiv a/(a^2 + b^2)$ 、 $\beta \equiv b/(a^2 + b^2)$  である。

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (x - y)f \quad (6.21)$$

の一般解は

$$f = e^{-xy} G(x + y) \quad (6.22)$$

である。

**演習.**

<sup>37</sup> より正確には、 $u(x_i, a_j)$  を完全解とすると、行列  $\partial^2 u / \partial x_i \partial a_j$  が正則でなくてはならない。

(A) 次の準線形一階偏微分方程式を解け。

(1)

$$(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0. \quad (6.23)$$

(2)

$$(bz - cy) \frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az) \frac{\partial z}{\partial y} = ay - bx. \quad (6.24)$$

(3)

$$\left[ L \frac{\partial}{\partial L} + \frac{u}{\pi^2} \left( \frac{\epsilon \pi^2}{2} - u \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{u}{(2\pi)^2} N \frac{\partial}{\partial N} \right] f = 0. \quad (6.25)$$

(4) 次の方程式

$$-y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6.26)$$

の解は回転対称であることを示せ。

(B)  $z(\partial z / \partial x) + \partial z / \partial y = 1$  の解で 曲線  $y = 2z$ 、 $x = z^2$  を含むものを求めよ。

(C) 次の二つの偏微分方程式を解け：

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad (6.27)$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2. \quad (6.28)$$

そして  $x = y = z$  を含む特解を求めよ。

## 6.7 次数 $p$ の同次関数.

$u$  を  $\mathbf{R}^n$  の中の領域で定義された関数とする。もし

$$u(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.29)$$

が任意の実数  $\lambda$  について成立するならば、 $u$  は**次数  $p$  の同次関数** (homogeneous function) といわれる。ここで  $p$  は実数である。 $\lambda$  は任意の実数であるから、たとえば、 $\lambda = x_1^{-1}$  においてもよい。そこで、たとえば、 $p$  次の同次関数は次のように書き直すこともできる：

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_1^p f\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right). \quad (6.30)$$

## 6.8 定理 [同次性の必要十分条件].

一階微分可能関数  $u$  が次数  $p$  の同次関数であるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = pu \quad (6.31)$$

である。

[証明方針] 必要性は微分の連鎖律から容易にわかる。十分性を示すには (6.31) ( $\rightarrow$  6.4) の一般解を構成し、それが次数  $p$  の同次関数であることを示せば (6.30) を示すのはたやすい。

### 6.9 定理 [同次関数の導関数は同次関数である].

$u$  を次数  $p \in \mathbf{R}$  の微分可能な同次関数であるとする。このとき、かつてな  $x_i$  について偏導関数  $\partial u / \partial x_i$  は次数  $p - 1$  の同次関数である。□

これは同次関数の定義からすぐわかる。

### 6.10 Kepler の第三法則.

$n$ -体からなる系のポテンシャルエネルギー  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  が  $p$  次の同次関数であるとする。これは力が (ベクトル値をとる) 次数  $p - 1$  の同次関数であることを意味する ( $\rightarrow 6.9$ )。Newton の運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (6.32)$$

は次のようなスケーリング性をもつ (ここで、 $m_i$  は第  $i$  粒子 (天体) の質量であるとする):  $\mathbf{r}_i \rightarrow \lambda \mathbf{r}_i$  のように、また  $t \rightarrow \mu t$  のようにスケールすると

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \lambda^{p-2} \mu^2 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (6.33)$$

となる。それゆえ、もしも  $\mu = \lambda^{1-p/2}$  が成り立てば、運動方程式は不変に保たれる。重力については  $p = -1$  なので、これは Kepler の第三法則 ( $T^2 = a^3$ ) を意味する。<sup>38</sup>

### 6.11 定係数線形偏微分方程式.

$\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$  という記号を導入し、偏微分作用素全体を  $\{\partial_i\}$  と書くことにしよう。  $P(\{x_i\})$  を定係数多項式とすると

$$P(\{\partial_i\})u = g, \quad (6.34)$$

を定係数線形偏微分方程式という。ここで  $g$  は  $\{x_i\}$  の関数であるとする。この一般解は同次方程式  $Pu = 0$  の一般解<sup>39</sup> と  $Pu = g$  の一つの解の和で書ける。

### 6.12 定理 [Malgrange-Ehrenpreis]. (Malgrange-Ehrenpreis' theorem)

もしも  $g$  が領域  $D \subset \mathbf{R}^n$  において  $C^\infty$  ならば、(6.34) はその領域で  $C^\infty$  の解を持つ。□<sup>40</sup>

**6.13 因数分解 ‘定理’.** もしも  $P$  が互いに素な二多項式因子に分解されたとする、つまり  $P = P_1 P_2$  とかけるならば、 $Pu = 0$  の一般解は  $P_1 u = 0$  の一般解と  $P_2 u = 0$  の一般解の和で書ける。□<sup>41</sup>

<sup>38</sup> ほかの例については J. M. Smith, *Mathematical Ideas in Biology* (Cambridge UP) を見よ。

<sup>39</sup> “一般解” という言葉は、線形の  $m$  階偏微分方程式については、 $m$  個の任意関数を含む解を意味する。

<sup>40</sup> 証明については G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equation*, p84-7 を見よ。

<sup>41</sup> この「定理」は実用的には極めて有用であるが、文字通りに取るのは正しくない。つまり、出てくる任意関数の滑らかさについて目をつぶっての主張。



形式的に  $P(f_1 + f_2) = P_2 P_1 f_1 + P_1 P_2 f_2$  からこれは明らか。ここで関数  $f$  は十分なめらかとした。

$P$  は多変数の多項式なので、一階偏微分作用素  $\sum a_i \partial_i$  の積に分解できる保証は全くない。しかし、これが可能な場合は上の分解は一般解を与えてくれる ( $\rightarrow 6.4$ )。もしも  $P$  が一次因子に分解できないときは PDE を解く一般的方法はない (ただし、6.18 を見よ)。

以下は二変数の場合のみ扱う。

#### 6.14 非同次方程式の解き方.

6.11 からわかるように、どんな手を使ってもいいから  $Pu = g$  の解を一つ見つければいい。役に立つ事実は:

- (1) もし  $P = P_1 P_2$  ならば、 $Pu = g$  を一步一步解くことが出来る。まず  $P_1 u_1 = g$  の解  $u_1$  を見つけ、ついで  $P_2 u = u_1$  を解けばいい。
- (2)  $P(\partial_x, \partial_y) e^{ax+by} u = e^{ax+by} P(\partial_x + a, \partial_y + b) u$ . [これは、たとえば、 $\partial_x^n e^{ax+by} u = \partial_x^{n-1} e^{ax+by} (\partial_x + a) u$  からわかる。]

#### 6.15 補題.

$$(a\partial_x + b\partial_y + c)^n u = 0 \quad (6.35)$$

の一般解は

$$u = e^{-cx/a} \sum_{i=0}^{n-1} x^i \phi_i(bx - ay), \quad (6.36)$$

で与えられる。ただし、 $\phi_i$  は任意関数である。(もしも  $a = 0$  であるときは、 $e^{-cx/a}$  を  $e^{-cy/b}$  でおきかえ  $x^i$  を  $y^i$  でおきかえればいい。) □

(1)、(2) を示すには 6.14 を使えばいい。次の標準的な手も記憶に値するだろう。  $L$  を一階微分作用素とする。  $L^2 u = 0$  が解きたいときは  $Lv = 0$  の解を使って、  $u = wv$  と書くことにすると、  $w$  についての方程式は普通もとの問題よりも解きやすい。

#### 6.16 例. 次の方程式の一般解を求めよ (3.3 を復習せよ)。

(1) 一次元空間での波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.37)$$

出てくる微分作用素は

$$P(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x) \quad (6.38)$$

と分解できる。そこで因数分解定理 6.13 はその一般解が  $(\partial_t - c\partial_x)u = 0$  の一般解と  $(\partial_t + c\partial_x)u = 0$  の一般解の和であることを教えてくれる。これらの方程式は 6.14 を使ったやすく解けるので、(6.37) の一般解は  $F$ 、 $G$  を二階微分可能な関数として

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (6.39)$$

と書ける。<sup>42</sup> つまり、一般解は右に伝搬する解と左に伝搬する解の和で書ける；3.3に見たとおり。

(2) 二次元空間の Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (6.40)$$

これは (6.37) で  $c = i$  と置いたものである。したがって、一般解は  $F(x + iy) + G(x - iy)$  になる。われわれが欲しいのは実解だから、もしも  $F(z) + G(\bar{z})$  が実数なら、それは  $F(z)$  の実部と考えていい。<sup>43</sup>

(3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (6.41)$$

この一般解は

$$u(x, y) = F(2x - y) + e^y G(x), \quad (6.42)$$

ただし  $F$  と  $G$  は二階微分可能な関数である。

### 6.17 非同次方程式の例. 次の一般解を求めよ:

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x. \quad (6.43)$$

6.14(1) を使うか、または見ただけで  $u = x^3/6$  が一つの解であることがわかる。そこで一般解は (→6.16)

$$u(x, y) = F(x + iy) + G(x - iy) + \frac{x^3}{6}. \quad (6.44)$$

(2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x + at) \quad (a \neq \pm 1). \quad (6.45)$$

6.14(2) を使う。方程式が線形であることと  $\operatorname{Im} e^{i(x+at)} = \sin(x + at)$  であることを使うと  $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = e^{i(x+at)}$  を解けばいいことがわかる:

$$u = \frac{1}{2i(1 - a^2)} e^{i(x+at)} \quad (6.46)$$

この虚部が求める解である。よって、(6.45) の一般解は

$$u = F(x - t) + G(x + t) + \frac{1}{a^2 - 1} \sin(x + at). \quad (6.47)$$

<sup>42</sup> 6.12 の脚注を参照。

<sup>43</sup> 解析関数の実部になることは関数論の知識がいる：調和関数はある解析関数の実部である。まず  $G(\bar{z})$  はある解析関数  $H(z)$  の複素共役と考えてよいことに注意しよう。 $F(z) + \overline{H(z)}$  はすべての  $z$  について実になる。 $F(z) + \overline{F(z)}$  もすべての  $z$  について実なので  $F(z) - H(z)$  はすべての  $z$  について実になる。すべての  $z$  で実の解析関数は実定数であるから、実は  $H$  と  $F$  を同一視してよい。

もしも  $a = \pm 1$  (共鳴の場合) の時は,  $v$  を  $u = e^{i(x+at)}v$  で導入して  $v$  についての式に変えて解く。<sup>44</sup>

#### 演習.

- (1)  $z(\partial z/\partial x) + \partial z/\partial y = 1$  の解で曲線  $y = 2z$ ,  $x = z^2$  を通るものを見つけよ。  
 (2) 次の方程式 (電信方程式) といわれる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a+b) \frac{\partial u}{\partial t} + abu = 0, \quad (6.48)$$

ただし  $a, b$  は定数である。一階微分の項を除く標準的なやり方は

$$v = e^{(a+b)t/2} u \quad (6.49)$$

と置くことで、結果として

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 v - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (6.50)$$

となる。もしも  $a = b$  の時はケーブルは、信号強度は減衰するものの、その形が歪むことはない。

### 6.18 拡散方程式への応用.

一次元空間での拡散方程式に出てくる微分作用素は  $P = (\partial_t - D\partial_x^2)$  なので、一次因子に因数分解することはできない。しかし、もしも  $P(a, b) = 0$  ならば、 $\exp(at + bx)$  は一つの解である。そこで、たとえば、

$$e^{ikx - Dk^2 t} \quad (6.51)$$

は解である。方程式は線形なので、 $f$  を勝手な関数 (積分可能とする) として次の積分

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) e^{ikx - Dk^2 t} \quad (6.52)$$

が収束するならば、それは一般解になる。

6.14(2) は非同次方程式の一つの解を求めるためにも有用である。たとえば、

$$\partial_x^2 u - \partial_t u = \sin(ax + bt). \quad (6.53)$$

の一つの解は

$$\tilde{u} = \frac{1}{a^4 + b^2} \left[ -a^2 \sin(ax + bt) + b \cos(ax + bt) \right] \quad (6.54)$$

である。

---

<sup>44</sup> これは 6.15 ですで見たと標準的な手法である。

## 7 Green関数入門

### 7.1 Green関数とデルタ関数.

Greenの基本的アイデアは2.7で見たが、そこで、点 $a$ に重み1を持ちそれ以外の場所で重みがゼロの“関数” $\delta_a$ を導入するのが好都合なことが分かった。もしもこの重み分布に対応した密度の分布 $\rho(x)$ を考えると $\rho(x)$ は $x=a$ で $+\infty$ それ以外でゼロになることが分かる。これを表現するのに記号 $\delta(x-a)$ を導入する。Greenのアイデアを実現するためには、たとえば

$$-\Delta\psi = \delta(x-a) \quad (7.1)$$

のような方程式を適当な境界条件の下で解かなくてはならない。

### 7.2 Green関数と基本解.

$L$ を微分作用素とする。<sup>45</sup>

$$L\psi(x) = \delta(x-y) \quad (7.2)$$

の解（どんな解でもいい）を**基本解** (fundamental solution) という。もし、それがさらに問題の補助条件を満たすならばその解をこの問題の *Green関数* (Green's function) という。

### 7.3 $\delta$ -関数の定義

$$\int \delta(x)f(x)dx = f(0) \quad (7.3)$$

をみたす記号 $\delta(x)$ を **$\delta$ -関数** (delta function) と呼ぶ（関数ではないが）。 $\delta$ の中の「独立変数」 $x$ は普通に関数の時のように扱えると約束するので：

$$\int \delta(x-a)f(x)dx = \int \delta(y)f(y+a)dy = f(a), \quad (7.4)$$

$$\int \delta(ax)f(x)dx = \int \delta(y)f(y/a)dy/|a| = f(0)/|a| \Rightarrow \delta(ax) = \delta(x)/|a| \quad (7.5)$$

などとなる。

#### 演習.

(A)

次の量を計算せよ。

(1)

$$\int_{-5}^5 \cos x \delta(x)dx. \quad (7.6)$$

(2)

$$\int_{-5}^{10} \delta(x) \log \Gamma(x+5)dx. \quad (7.7)$$

<sup>45</sup> 線形作用素  $L$  はもしも  $Lf(x)$  が  $f(x)$  とその  $x$  における（偏）導関数のみによるとき線形**微分作用素** (differential operator) と言われる。たとえば、 $V$  をある関数とするととき  $-d^2/dx^2 + V(x)$  は線形微分作用素である。

## 7.A Laplace 方程式の Green 関数

### 7.4 Laplace 方程式の基本解：Coulomb ポテンシャル

3次元空間では

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta(\mathbf{x}). \quad (7.8)$$

デルタ関数の定義に立ち返ってこれを示そう。

$$\left\langle \Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|}, f \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \Delta f \right\rangle = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r} \Delta \bar{f} = 4\pi \int_0^\infty r \Delta \bar{f} dr, \quad (7.9)$$

ただし、上に引いてある短い線は方向についての平均 ( $\theta$  と  $\varphi$  についての平均) を意味する。 $\bar{f}$  は球対称だから、 $\Delta \bar{f} = r^{-1} d^2(r\bar{f})/dr^2$  ( $\rightarrow$  5.10) が得られる。よって、

$$\left\langle \Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|}, f \right\rangle = 4\pi \int_0^\infty \frac{d^2}{dr^2} r \bar{f} dr = 4\pi [r \bar{f}' + \bar{f}]_0^\infty = -4\pi f(0). \quad (7.10)$$

### 7.5 次元降下法.

$d$ -次元空間においてももしもある座標軸の方向に系が並進対称であると、この方向に垂直な面による解の断面は  $(d-1)$ -次元空間での結果と区別できないだろう。そこで、もしも  $d$ -次元空間での結果をある軸の方向について平均（積分）してしまえばそれはその軸に直交する  $(d-1)$ -次元空間における結果と同一になるだろう。より低次元の結果をそれより高次元の結果の平均（積分）で求める方法を**次元降下法** (method of descent) という。

たとえば、

$$-\Delta_d \varphi = - \left( \Delta_{(d-1)} + \frac{d^2}{dx_d^2} \right) \varphi = \delta_{d-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \delta(x_d - y_d) \quad (7.11)$$

だから、これを  $x_d$  について積分すると  $d$ -次元問題から  $(d-1)$ -次元問題が得られる。

$\mathbf{x}$  の  $x_d$  成分を落とした一次元下のベクトルを  $\mathbf{x}'$  と書くことにすると、 $\int dx_d \delta_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta_{d-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')$  なので、もしも  $d$ -次元 Coulomb ポテンシャルを  $x_d$  に関して積分すると、 $(d-1)$ -次元 Coulomb ポテンシャルが得られるはずである。これを示すもっともいい方法は指数の肩に上げた後で  $x_d$  について積分する方法である：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_d \frac{1}{(a^2 + x_d^2)^{(d-2)/2}} = \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx_d \frac{1}{\Gamma((d-2)/2)} t^{(d-2)/2-1} e^{-(a^2 + x_d^2)t}, \quad (7.12)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((d-2)/2)} \int_0^{+\infty} dt t^{(d-3)/2-1} e^{-a^2 t} \quad (7.13)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((d-2)/2)} \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \frac{1}{a^{d-3}}, \quad (7.14)$$

ただし、 $a^2 = x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2$  である。この結果と Gamma 関数についての基本的関係から  $(d-1)$ -次元 Coulomb ポテンシャルが得られる。演習としてこれを実行せよ。

## 7.6 Laplace 方程式の Green 関数：勝手な領域.

もしも、問題の領域が全空間でないときは一般には Green 関数を求めるのは楽ではない。しかし、領域の対称性がよいときはしばしば賢い方法がある。その一つが鏡像電荷の方法 (method of image sources) である。基本的な考えは全空間に考えている領域のコピーを敷き詰めその一つ一つに適当な電荷 (鏡像電荷) を置くことである。

## 7.7 鏡像の方法 I. 半空間.

3次元 Laplace 方程式のある領域における基本解  $G(x, y, z|x', y', z')$  は  $(x', y', z')$  に単位電荷を置いたときの、領域の境界のポテンシャルを適当に (何でもよい) 決めたときの  $(x, y, z)$  における電位である。半平面  $x > 0$  でその境界に同次 Dirichlet 条件を置くときの Green 関数は

$$G_D(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right]. \quad (7.15)$$

ここで電荷は  $(x', y', z')$  に置かれていてその鏡像電荷は  $(-x', y', z')$  にある。  $x = 0$  でのポテンシャル (電位) をゼロに保つために鏡像電荷はマイナスである。

もしも境界条件が  $x = 0$  における同次の Neumann 条件であれば、  $x = 0$  で勾配が消えなくてはならないので鏡像電荷は  $+1$  でなくてはならず、半空間の Neumann 関数 (= Neumann 条件下の Green 関数) は

$$G_N(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \quad (7.16)$$

となる。

## 7.8 鏡像の方法 II. もっとややこしい場合.

いくつかの例を見ておこう。

### 演習.

- (1) 無限の短冊型  $(-\infty, +\infty) \times [0, \pi]$  において同次 Dirichlet 条件のもとで Laplace 方程式の Green 関数を求めよ。[さらなる条件がないと答は一つに決まらないことに注意] ( $\rightarrow$  1.17 Discussion (2)).
- (2)  $a$  を定数として、 $x > a$  なる半空間における Dirichlet 条件下での Laplace 方程式の Green 関数を求めよ。
- (3) 3次元空間において  $x = 0$  と  $y = 0$  をゼロにたもつ Dirichlet 条件下での  $(x', y', 0)$  に置かれた電荷  $Q$  によるポテンシャルを求めよ (つまり  $-\Delta\psi = Q\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z)/4\pi$  をとけ)。

### 7.9 調和性と対称性.

Laplace 方程式の Green 関数はその特異点以外では調和関数である ( $\rightarrow$  4.10)。鏡像法の鍵は次の二点である。

- (1) 反射しても調和性は変わらない (鏡像原理 (reflection principle) とよばれる)。
- (2) 電荷の像は電荷である。

### 7.10 Green 関数の使い方 (同次 Laplace 方程式の場合).

もし境界条件が同次なら、線形非同次偏微分方程式は Green 関数を使って解くことができる。典型的な例は同次境界条件下で Poisson 方程式を解く問題である：

$$-\Delta\psi = f(\mathbf{x}). \quad (7.17)$$

この解は

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_D d\mathbf{y} G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \quad (7.18)$$

ただし  $D$  が問題の領域である。

### 7.11 Green の公式 (Green's formula).

$D \subset \mathbf{R}^d$  は有界領域であるとし、 $u$  と  $v$  は  $C^2$ -関数で  $D$  で定義されているとする。このとき、

$$\int_D (v\Delta u + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) d\tau = \int_{\partial D} v \text{grad } u \cdot d\mathbf{S}, \quad (7.19)$$

および

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) d\tau = \int_{\partial D} (v \text{grad } u - u \text{grad } v) \cdot d\mathbf{S} \quad (7.20)$$

が成立する。

[略証] (7.19) は  $\text{div}(u \text{grad } v) = \text{grad } u \cdot \text{grad } v + u\Delta v$  と Gauss の定理 ( $\rightarrow$  4.12) から直ぐ分かる。第二の公式 (7.20) は (7.19) から自明。

### 演習.

領域  $D \subset \mathbf{R}^d$  の上で  $u$  は調和関数であるとする。次式を示せ。

$$\int_{\partial D} \text{grad } u \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (7.21)$$

### 7.12 Green 関数の対称性.

$G(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  は領域  $D$  における同次 Dirichlet 条件下の Green 関数とすると、

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = G(\mathbf{y}|\mathbf{x}). \quad (7.22)$$

これを示すためには Green の公式で  $u = G(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ 、 $v = G(\mathbf{z}|\mathbf{y})$  を使えばいい。

### 7.13 Green 関数を使った Dirichlet 問題の解.

$\varphi$  および  $f$  は積分可能な関数として、ある開領域  $D$  での次の Dirichlet 問題

$$-\Delta u = \varphi, \quad u|_{\partial D} = f, \quad (7.23)$$

の解は

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}|\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y} - \int_{\partial D} f(\mathbf{y})\partial_{n(\mathbf{y})}G(\mathbf{x}|\mathbf{y})d\sigma(\mathbf{y}) \quad (7.24)$$

と書ける。ここで  $\partial_{n(\mathbf{y})}$  は点  $\mathbf{y}$  における外向き法線微分であり、 $\tau$  は体積要素、 $\sigma$  は面積要素である。

この公式は 7.11 中の Green の公式から容易に得られる。そこで  $u$  が解、 $v$  を問題の Green 関数とすればいい。このように非同次境界値問題が同次境界条件の下での Green 関数を使って書けるのである。

**課題.**

(A) (7.24) の第二項は電気二重層による電位と解釈できる。

(B) (7.24) の面積分は次のような注目すべき形に書き換えられる：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d\omega f(\mathbf{y}), \quad (7.25)$$

ただし  $\omega$  は  $\mathbf{x}$  から見た  $\mathbf{y}$  における面積要素を見込む立体角である。

## 7.B 拡散方程式の Green 関数

### 7.14 拡散方程式の基本解.

拡散方程式の一つの基本解 ( $\rightarrow 7.2$ ) は

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - D\Delta\psi = \delta(t-s)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (7.26)$$

を ( $\mathbf{y}$  以外でのゼロ初期値および解の大域的有界条件の下で) 解けば与えられる。 $d$ -次元空間で

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, s) = \left( \frac{1}{4\pi D(t-s)} \right)^{d/2} \exp\left( -\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4D(t-s)} \right) \quad (7.27)$$

が解であることはたやすく確認できる。したがって、これは拡散方程式の基本解である ( $\rightarrow 7.17$ )。これは解が無限遠点で消えるという条件の下での Green 関数 ( $\rightarrow 7.2$ ) でもある。この式はしばしば **拡散核** (diffusion kernel) と呼ばれる。次の式を示すこともできる：

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow s} G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, s) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (7.28)$$



### 課題.

(1) Green 関数を使って偏微分方程式の形式解を作る（あるいは積分方程式に変える）のは、いろいろな近似法が使えるので、しばしば有用な方法である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x, t)u \quad (7.29)$$

の適当な同次境界条件の下での形式解は

$$u(x, t) = \int d\mathbf{y} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, 0) u_0(\mathbf{y}) + \int_0^t ds \int d\mathbf{y} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) u(\mathbf{y}, s) f(\mathbf{y}, s), \quad (7.30)$$

と書ける。ここで  $u_0$  は初期条件であり、 $G$  は Green 関数である。

### 7.15 拡散方程式の尺度不変解 (scaling invariant solution).

拡散方程式を眺めると方程式は次のような変数変換の下で不変であることが分かる： $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\lambda\mathbf{x}, \lambda^2 t)$ .<sup>46</sup> もしも解の全「物質」についての規格化条件

$$\int \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad (7.31)$$

を置くと  $d$ -次元空間で

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \lambda^d \psi(\lambda\mathbf{x}, \lambda^2 t). \quad (7.32)$$

となる。

### 7.16 次元解析.

尺度不変解を求める別の方法は次元解析 (dimensional analysis) である。次元解析は単位 (= 尺度) を取り替えても不変に保たれる変数の組み合わせを発見する方法である。量  $Q$  の次元は普通  $[Q]$  と書かれる。長さの次元を  $L$  と書こう： $[\mathbf{x}] = L$ 、時間の次元を  $T$  とする： $[t] = T$ 。このとき、 $[D] = L^2/T$ 。また  $\int d\mathbf{x} u = 1$  から  $[u] = L^{-d}$  が得られる。こうして二つの無次元量 (= 変換不変量) を作ることができる：

$$[\mathbf{x}/\sqrt{Dt}] = 1, \quad [(tD)^{d/2}u] = 1. \quad (7.33)$$

よって  $u(Dt)^{d/2}$  は  $\mathbf{x}/\sqrt{Dt}$  の関数でなくてはならない：

$$u(\mathbf{x}, t) = (Dt)^{-d/2} f(\mathbf{x}/\sqrt{Dt}). \quad (7.34)$$

### 7.17 尺度不変な球対称解.

もしも解が  $\mathbf{x} = 0$  のまわりに球対称ならば、7.16 のなかの  $f$  は  $r \equiv |\mathbf{x}|$  の関数である。つまり、次のような関数  $h$  がある：

$$\psi(\mathbf{x}, t) = t^{-d/2} h(r/\sqrt{Dt}). \quad (7.35)$$

<sup>46</sup> これは実は次元解析の基本的アイデアでもある。次の項目を見よ。

これを拡散方程式に代入すると  $x = r/\sqrt{Dt}$  の関数としての  $h$  の微分方程式が求まる：

$$h'' + \left( \frac{d-1}{x} + \frac{x}{2} \right) h' + \frac{d}{2} h = 0. \quad (7.36)$$

解は原点でも滑らかであるはずなので  $h$  は  $x^2$  の行儀のよい関数であるはず。そこで  $h(x) = g(x^2)$  とおこう。  $g$  は次の方程式に従う。

$$\frac{d}{2}(g + 4g') + x^2 \frac{d}{dx}(g + 4g') = 0. \quad (7.37)$$

解が有界であることを要求すると  $g + 4g' = 0$  が唯一の可能性である。つまり

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{C}{t^{-d/2}} e^{-x^2/4Dt} \quad (7.38)$$

ここで  $C$  は規格化条件で決まる任意定数である。(7.27) は拡散方程式が時空並進に対して不変であることを使ってデルタ関数の場所を変えれば求まる。

### 7.18 初期条件の処理法.

領域  $D$  における拡散方程式の次の初期境界条件問題を考えよう：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D\Delta\psi, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \psi|_{\partial D} = \varphi. \quad (7.39)$$

この問題は次の形に書き換えられる：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D\Delta\psi + \delta(t)\psi_0, \quad \psi = 0 \text{ for } t \leq 0, \quad \psi|_{\partial D} = \varphi. \quad (7.40)$$

つまり、非同次初期条件はソースとして付け加えることができる（初期条件は同次条件になる）。これは方程式 (7.40) の両辺を  $t = -\epsilon$  から  $t = +\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) まで積分してそのあとで  $\epsilon \rightarrow 0$  にすれば示される。

### 演習.

(A) 長さ  $l$  の棒がある ( $x$  軸上の  $[0, l]$  と同一視する)。その熱拡散係数を  $D$  とし、棒は両端を除いて熱的に隔離されているとする。両端の温度を

$$T(0, t) = g(t), \quad T(l, t) = h(t) \quad (7.41)$$

とする ( $t > 0$ )。<sup>47</sup> 初期条件は

$$T(x, 0) = f(x). \quad (7.42)$$

ここで  $f, g, h$  は簡単のため  $C^1$  だとして。

(B) 上と同じく長さ  $l$  の棒を考えよう。ただし、今度は熱的に隔離されていなくて、Newton の放射の法則 (→1.16) に支配されているとする。まわりの温度は  $T_0$ 。  $x = 0$  の端は温度  $A$  に保たれ、他方は熱的に隔離されている（熱の出入りがない）。初期の温度をいたるところ  $A$  としよう。方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c(T - T_0). \quad (7.43)$$

これを解く標準的な手は新たな従属変数  $\tau = e^{-ct}(T - T_0)$  を使って方程式を書き直すことである。

<sup>47</sup> These conditions are compatible with any initial condition so long as  $t = 0$  is excluded.

### 7.19 次元降下法.

7.5 と同様に  $(d-1)$ -次元空間の Green 関数は  $d$ -次元のものをその一次元について積分してしまえば求まる。これは Gauss 積分を使えばたやすい。

### 7.20 拡散核の Markov 性.

拡散核 (7.27) はマルコフ性 (Markovian property) といわれる次のような注目すべき性質を持っている：かつてな  $s' \in (s, t)$  について

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) = \int d\mathbf{z} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{z}, s') G(\mathbf{z}, s' | \mathbf{y}, s) \quad (7.44)$$

ただし中間の時刻  $s'$  については積分しないことに注意。直接積分しても示せるが Fourier および Laplace 変化を使うとエレガントに示される。あるいは、賢い方法は 7.18 を使うことである。拡散核のマルコフ性は Feynman-Kac 経路積分の基礎である。

### 7.21 拡散方程式についての鏡映法 – 鏡像源.

半空間  $x > 0$  で  $yz$ -面に同次境界条件を置く。

(1) **Dirichlet 条件の場合.** 単位のデルタ関数的熱源を  $t = 0$  において  $x = x' > 0$  に置く。  $G^-$  として  $t = 0$   $x = -x'$  に局在した熱源を持つ全空間に対する Green 関数とする。  $G$  を  $t = 0$   $x = x'$  に局在した熱源を持つ全空間に対する Green 関数とすると  $H \equiv G - G^-$  は問題の条件を満足する。つまり、  $H$  は  $x = 0$  に同次 Dirichlet 条件を課した拡散方程式の Green 関数である。つまり、  $H$  は + 熱源を  $x'$  に - 熱源を  $-x'$  に置いた全空間での答を  $x > 0$  に制限したものになっている。二番目の熱源のことを **鏡像源** (image source) という。

(2) **Neumann 条件の場合.** もしも  $x = 0$  に同次 Neumann 条件を課すると半空間における Green 関数は  $G + G^-$  で与えられる。つまり、 + 熱源を  $-x_0$  に鏡像源を置くことによって全空間の問題にしてとくのである。

#### 演習.

(A)  $[0, 1]$  の上での拡散方程式で同次 Dirichlet 条件を  $x = 0$  に同次 Neumann 条件を  $x = 1$  に課す。そして単位デルタ的熱源を  $x = x_0$  に時刻  $t = 0$  におく。

(B) **Diffusion equation to defend God?** Kelvin accepted organic evolution advocated by Darwin, but he could not swallow the logical consequence of Darwinism: no design or in this case no divine intervention at the beginning of life. He used heat conduction to destroy Darwinism:

The temperature gradient in the Earth near its surface is roughly  $v = 0.035\text{K/m}$  at the present time. He assumed that the Earth was a homogeneous sphere of radius  $R \simeq 6400\text{km}$ . The evolution of the temperature  $T(\mathbf{r}, t)$  at position  $\mathbf{r}$  at time  $t$  obeys Fourier's law

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T.$$

At time  $t = 0$  he assumed that the Earth was at its melting temperature which was  $T_0 = 3000\text{K}$  above the surface temperature for  $|\mathbf{r}| < R$ . Its surface temperature must have been close to the present temperature for all  $t > 0$  to allow life. Let us choose this to be the zero point of temperature for all  $t > 0$ .

(1) Using the numbers  $v$ ,  $T_0$  and  $R$ , give an argument that the thickness of the transition layer over which the temperature differs significantly from  $T_0$  is much smaller than the Earth's radius at the present time.

(2) Hence, the full sphere problem simplifies to the 1-d problem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

under the condition that  $T(x, 0) = T_0$  for all  $x > 0$ , and  $T(0, t) = 0$  for all  $t > 0$ . Find the solution.

(3) Using the value of  $v$ , compute the age (in years) of the Earth, assuming that the thermal diffusivity is  $\kappa = 0.7 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .<sup>48</sup>

(4) Read the following to be a bit wiser as a physicist:

C. Darwin, *The Origin of Species* (Sixth edition Jan, 1872) Chapter X, “Sir W Thompson concludes that the consolidation of the crust can hardly have occurred less than 20 or more than 400 millions years ago, but probably not less than 98 or more than 200 millions years.”

Ibid., Chapter XV, “... and this objection, as urged by Sir William Thompson, is probably one of the gravest as yet advanced, I can only say firstly, that we do not know at what rate species change as measured by years, and secondly, that many philosophers are not as yet willing to admit that we know enough of the constitution of the universe ...”

Now we know Darwin was perfectly right. Thompson did not know the radioactivity. In a certain sense, in retrospect at least, Darwin pointed out the existence of unknown physics.

Later, Huxley commented: Mathematics may be compared to a mill of exquisite workmanship, which grinds your stuff of any degree of fineness; but nevertheless, what you get out depends what you put in; and as the grandest mill in the world will not extract wheat-flour from peascods, so pages of formulae will not get a definite result out of loose data. However, in this case the defect of the theory was much more serious. In any case Darwin did not have much respect of mathematics; Boltzmann was strongly influenced by Darwin, and he suggested that the 19th century may be called the century of Darwin.

It is said that Fourier had a dream to explore the interior of the earth through the study of heat conduction, and then to study the formation process of the earth and the solar system. Kelvin seems to have realized a nightmare.

## 7.22 Green 関数の使い方: 同次境界問題.

拡散方程式 (熱源つき),

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - D\Delta\psi = \sigma(\mathbf{x}, t), \quad (7.45)$$

では、境界条件が同次であっても初期条件は考えなくてはならない:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}). \quad (7.46)$$

初期条件は熱源に吸収できるのだった ( $\rightarrow 7.18$ ) から

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - D\Delta\psi = \sigma(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x})\delta(t). \quad (7.47)$$

それゆえ同次境界条件下での (7.45) + (7.46) の解は Green 関数を使って

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_D d\mathbf{y} \int_0^t ds G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, s) \sigma(\mathbf{y}, s) + \int_D d\mathbf{y} G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, 0) f(\mathbf{y}). \quad (7.48)$$

ただし  $D$  が問題の領域である。

非同次の境界値問題を解くには境界条件を満たす連続関数を差し引くという頭のいいやり方がある。

---

<sup>48</sup> The number obtained here is ridiculously short (although much longer than some beliefs based on the wrong reading of the Bible).

## 7.C 波動方程式の Green 関数

### 7.23 3次元波動方程式の全空間における Green 関数.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \psi = \delta(t) \delta(\mathbf{x}). \quad (7.49)$$

を解きたい。球対称解を推測するのはむづかしいことではない。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(|\mathbf{x}| - ct)}{4\pi c |\mathbf{x}|} \Theta(t), \quad (7.50)$$

ここでステップ関数  $\Theta$  は因果律を満たすために付け加えられている。

これを理解するために次の計算は役に立つだろう。球対称条件の下では、波動関数は  $|\mathbf{x}| > 0$  において

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r\right) \psi = 0 \quad (7.51)$$

もし  $r\psi = F$  を導入すると  $F$  は一次元波動関数に支配されることに注目（憶えて置いて損しない）。

時空の並進対称性を使って一般の Green 関数を求められる：

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) = \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - c(t - s))}{4\pi c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Theta(t - s), \quad (7.52)$$

(7.52) は 遅延 Green 関数 (retarded Green's function) と呼ばれる。

### 7.24 遅延および先発 Green 関数.

波動方程式は時間反転対称なので

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(|\mathbf{x}| + ct)}{4\pi c |\mathbf{x}|} \Theta(-t), \quad (7.53)$$

も解のはずである。これは (7.52) と全く異なって奇妙な因果律に反する解であり、先発 Green 関数 (advanced Green's function) といわれる。

### 7.25 波動方程式についての次元降下法.

7.5 に説明されたことに従えば 3次元の遅延 Green 関数 (7.52) から二次元の遅延 Green 関数が得られるはずである

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{\Theta(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}} \Theta(t). \quad (7.54)$$

### 7.26 アフターグロー.

2次元 Green 関数は  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < ct$  でゼロでない。二次元空間の観測者にとって、電灯をパッとつけて消すと、パッと明るくなって直ぐ暗くなってそれで終わりではなく、その後もまわりが明るくなるのである。これを afterglow effect という。(実はこれは偶数次元空間の特徴である)。

### 7.27 波動方程式への鏡像法.

これは 7.20 や 7.21 で見たことのほとんどくり返しである。もし境界条件が Dirichlet 条件であれば Green 関数は

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) = \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - c(t - s))}{4\pi c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Theta(t - s) - \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}'| - c(t - s))}{4\pi c |\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \Theta(t - s), \quad (7.55)$$

ここで  $\mathbf{y}^0$  は  $\mathbf{y}$  の  $yz$ -面に関する鏡像の位置である。この境界条件は固い壁を理想化した境界である。では Neumann 条件ではどうなるか？それはどういう壁か？

#### 演習.

鏡像法をつかって一次元波動関数

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \quad (7.56)$$

の半直線  $[0, +\infty)$  で  $x = 0$  で変位がない条件で

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (7.57)$$

(ただし  $f(0) = g(0) = 0$ ) をとけ。[ただし、これは Green 関数の問題ではない。]

## 8 変数分離法 — 矩形領域 —

### 8.1 変数分離 (separation of variables) 一般的戦略.<sup>49</sup>

次の形の偏微分方程式を解きたいとしよう：

$$(L_1(x) + L_2(y))u(x, y) = 0, \quad (8.1)$$

ここで  $L_1$  および  $L_2$  は線形微分演算子 ( $\rightarrow 2.2$ ) で勝手な関数  $f, g$  に対して  $L_1(x)f(y) = L_2(y)g(x) = 0$  が成り立つものとする (独立変数に注意)。もしも

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (8.2)$$

と書かれるならば

$$YL_1X + XL_2Y = 0, \quad (8.3)$$

つまり、

$$(L_1X)/X = -(L_2Y)/Y \quad (8.4)$$

と結論できる。

(1) [分離のステップ]. (8.4) の左辺は  $x$  のみによりまた右辺は  $y$  のみによるので、この等号は両辺が実は定数  $\lambda$  であることを意味する：

$$(L_1X)/X = -(L_2Y)/Y = \lambda \quad (8.5)$$

定数  $\lambda$  は時に分離定数 (separation constant) と呼ばれる。

(2) [固有値問題]. 各変数一つづつにのみ関係する問題に以上の問題を分離するためには補助条件も適当に分離されなくてはならない。

もしも、たとえば  $x$ -方向については (つまり  $x$ -軸に直交する面で) 境界条件が同次であるとする、 $L_1X = \lambda X$  は固有値問題 (eigenvalue problem) になる； $L_1X = \lambda X$  がゼロでない解をもつためには  $\lambda$  は特別な値、固有値 (eigenvalues)、を取らなくてはならない。各固有値に対して自明でない解 (いたるところゼロではない解)  $X_\lambda(x)$  がある。

(3) [非同次境界値問題]. 以上で求めた  $\lambda$  に対して残りの方程式  $L_2Y = -\lambda Y$  を適当な境界条件の下でとかななくてはならない。その解を  $Y_\lambda(y)$  と書こう。

(4) [重ね合わせ]. われわれの問題は線形なので重ね合わせの原理 ( $\rightarrow 2.2$ ) から  $\sum_\lambda X_\lambda(x)Y_\lambda(y)$  も解であることが分かる。

もし、任意の滑らかな関数が固有関数  $X_\lambda$  の線形和でかけるならば (つまり、もしも集合  $\{X_\lambda\}$  が完備ならば)、問題を一般的に解くことができるだろう。<sup>50</sup> もしも  $\{X_\lambda\}$  が三角関数であれば Fourier 級数の理論が、Fourier が期待したとおり ( $\rightarrow 2.4$ )、十二分に活用できる。

要するに変数分離法の核心はどのように問題に適合した Fourier 展開の一般化をするかに尽きるのである。

<sup>49</sup> この方法は Daniel Bernoulli によって 1755 年頃波動方程式を解くためにはじめて使われた。

<sup>50</sup> 級数が少なくとも収束すること、無限和と微分の順序の交換などの正当化が必要である。 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$  が項別微分できる一つの十分条件は：

(i)  $u_n(x)$  is  $C^1$ ,

(ii) 級数は各点収束である、

(iii)  $\sum_{n=1}^\infty u'_n(x)$  は一様収束である。

物理学者は解は十分滑らかだと考えてこういうことを気にしない。それでいいことがほとんどである。

## 8.2 実例: 2次元 laplace 方程式 (Dirichlet 条件).

$[0, 1] \times [0, 1]$  上の次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界問題を解け。

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = 0 \text{ on } [0, 1] \times [0, 1] \quad (8.6)$$

境界条件は次の非同次 Dirichlet 条件である：

$$\psi(0, y) = u_0(y), \quad \psi(1, y) = u_1(y), \quad \psi(x, 0) = v_0(x), \quad \psi(x, 1) = v_1(x). \quad (8.7)$$

(1) [分離ステップ] 重ね合わせの原理 (→2.2) を使ってまず問題を各方向に分離する

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = 0 \text{ on } [0, 1] \times [0, 1], \quad (8.8)$$

$$\psi(0, y) = u_0(y), \quad \psi(1, y) = u_1(y), \quad \psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = 0. \quad (8.9)$$

および

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = 0 \text{ on } [0, 1] \times [0, 1], \quad (8.10)$$

$$\psi(0, y) = 0, \quad \psi(1, y) = 0, \quad \psi(x, 0) = v_0(x), \quad \psi(x, 1) = v_1(x). \quad (8.11)$$

ここで境界条件の分離はある特定に一方向が固有値問題になるよう同次条件にしてある。(さらなる分離も可能だが、通常その必要も御利益もない。) ここでは第二の問題は似たようなものだから、第一の問題だけ解くことにしよう。もとの問題の解はこれら二つの解の和で与えられる

(2) [固有値問題] (8.8)+(8.9) は  $y$ -軸に直交する面 (ここでは線だが) に同次境界条件がおかれている (つまり、 $\psi = 0$  at  $y = 0$  and  $y = 1$ )。それゆえ、 $\partial_y^2$  の固有値問題を考えるべきである：

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\mu u, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (8.12)$$

から固有値  $\mu = \pi^2 n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) と対応する固有関数  $\sin n\pi y$  が求まる。このような固有関数を全て集めた集合は完備である。ここで分離定数  $\mu$  の符号は (8.12) が固有値問題になるという要請で決まっていることに注意；解は振動的でなくてはならない。

(3) [非同次境界値問題] こうして解は次の形でなくてはならないことが分かる：

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) \sin n\pi y, \quad (8.13)$$

ただし、 $A_n(x)$  は

$$\frac{d^2 Q_n(x)}{dx^2} = n^2 \pi^2 Q_n(x). \quad (8.14)$$

を満足するものとする。

(4) [重ね合わせ] (8.14) の一般解は  $A_n \sinh n\pi x + B_n \cosh n\pi x$  だから分離した偏微分方程式の解は

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh n\pi x + B_n \cosh n\pi x) \sin n\pi y \quad (8.15)$$



と書ける（形式的に）。 $x = 0$  と  $x = 1$  で課せられている非同次境界条件から

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi y = u_0(y), \quad (8.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh n\pi + B_n \cosh n\pi) \sin n\pi y = u_1(y). \quad (8.17)$$

$B_n$  や  $A_n$  は Fourier 係数の求め方<sup>51</sup> にしたがって決めることが出来る。

**演習.**

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (8.18)$$

を  $x \in [0, L]$  と  $t \geq 0$  で考えたい。

(i) 解を一つにするために課すべき境界条件を論じよ。

(ii) 境界において  $u$  と  $\partial_x^2 u$  が消え、初期条件は  $\partial_t u(x, 0) = 0$  および  $u(x, 0) = f(x)$  であるとする。

(2) Laplace 方程式を次の境界条件の下で解け。実際に解く前に解のおおよその形をスケッチせよ。

### 8.3 Laplace 方程式（3次元、Dirichlet 条件）

$$\Delta \psi = 0 \text{ on } [0, a_x] \times [0, a_y] \times [0, a_z] \quad (8.19)$$

につぎの Dirichlet 境界条件を課す：

$$\begin{aligned} \psi(0, y, z) &= f_x(y, z), & \psi(a_x, y, z) &= g_x(y, z), \\ \psi(x, 0, z) &= f_y(x, z), & \psi(x, a_y, z) &= g_y(x, z), \\ \psi(x, y, 0) &= f_z(x, y), & \psi(x, y, a_z) &= g_z(x, y). \end{aligned} \quad (8.20)$$

---

<sup>51</sup> もちろん  $u_0$  と  $u_1$  は Fourier 展開可能と仮定する。

手続き 8.2(1) は、たとえば、次のような問題を与える：

$$\Delta\psi = 0, \text{ on } [0, a_x] \times [0, a_y] \times [0, a_z], \quad (8.21)$$

$$\psi(0, y, z) = \psi(a_x, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, a_y, z) = 0, \quad (8.22)$$

$$\psi(x, y, 0) = f_z(x, y), \quad \psi(x, y, a_z) = g_z(x, y). \quad (8.23)$$

(境界条件に現れる点  $x, y, z$  は問題の領域内の点でなくてはならない。) 8.2(2) に現れたのに類似する固有値問題は同次 Dirichlet 条件  $u(0, y) = u(a_x, y) = u(x, 0) = u(x, a_y) = 0$  を課した

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = -\mu^2 u \quad (8.24)$$

である。この式はさらに分離できて重ね合わせの原理から

$$\psi = \sum_{m,n} (A_{m,n} \sinh \mu_{m,n} z + B_{m,n} \cosh \mu_{m,n} z) \sin \frac{m\pi x}{a_x} \sin \frac{n\pi y}{a_y} \quad (8.25)$$

が一般的な解であることが分かる。ただし、 $\mu_{m,n}^2 = (m\pi)^2/a_x^2 + (n\pi)^2/a_y^2$  である。まだ決まっていない係数  $A_{m,n}$ 、 $B_{m,n}$  は標準的な積分で決まる。

もしも、たとえば  $a_x$  が有限でないときは (8.25) の中の  $m$  についての和は積分になる (Fourier 正弦変換 (Fourier sine transform))。

はじめの問題の解は  $x, y$  および  $z$  方向の三つの問題の解の和で与えられる。

#### 演習.

正方形  $[0, L] \times [0, L]$  の上の Laplace 方程式を

$$u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = A \sin(2\pi y/L), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, L) = B \sin(2\pi x/L) \quad (8.26)$$

の条件の下に解け。

### 8.4 Laplace 方程式 (Neumann 条件) .

$$\Delta\psi = 0 \text{ on } [0, a_x] \times [0, a_y] \times [0, a_z] \quad (8.27)$$

を次の Neumann 境界条件の下で解きたい：

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(0, y, z) &= f_x(y, z), \quad \partial_x \psi(a_x, y, z) = g_x(y, z), \\ \partial_y \psi(x, 0, z) &= f_y(x, z), \quad \partial_y \psi(x, a_y, z) = g_y(x, z), \\ \partial_z \psi(x, y, 0) &= f_z(x, y), \quad \partial_z \psi(x, y, a_z) = g_z(x, y). \end{aligned} \quad (8.28)$$

8.2(1) は、たとえば次の問題を与える：

$$\Delta\psi = 0 \text{ on } [0, a_x] \times [0, a_y] \times [0, a_z], \quad (8.29)$$

$$\partial_x \psi(0, y, z) = \partial_x \psi(a_x, y, z) = \partial_y \psi(x, 0, z) = \partial_y \psi(x, a_y, z) = 0, \quad (8.30)$$

$$\partial_z \psi(x, y, 0) = f_z(x, y), \quad \partial_z \psi(x, y, a_z) = g_z(x, y). \quad (8.31)$$

したがって、考えなくてはならない固有値問題は Neumann 境界条件  $\partial_x u(0, y) = \partial_x u(a_x, y) = \partial_y u(x, 0) = \partial_y u(x, a_y) = 0$  の下での

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = -\mu^2 u \quad (8.32)$$

である。これはさらに分離できて、結局

$$\psi = \sum_{m,n} (A_{m,n} \sinh \mu_{m,n} z + B_{m,n} \cosh \mu_{m,n} z) \cos \frac{m\pi x}{a_x} \cos \frac{n\pi y}{a_y}. \quad (8.33)$$

ただし、 $\mu_{m,n}^2 = (m\pi)^2/a_x^2 + (n\pi)^2/a_y^2$ 。まだ決まっていない係数  $A_{m,n}$  や  $B_{m,n}$  は標準的積分で決めることができる。

もしも領域が有界でないときは、 $m, n$  についての和の少なくとも一方が積分になる (Fourier 余弦展開 (Fourier cosine transform))。

### 8.5 Poisson の公式.

半径  $a$  で中心が原点にある円盤の上で Laplace 方程式を考える：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (8.34)$$

Dirichlet 境界条件をおくとする  $u(a, \theta) = f(\theta)$ 、ただしこれは滑らかな周期  $2\pi$  の関数とする。

曲座標を使ってこの方程式を分離することはできるが、変数分離の本質は Fourier 式の展開であったのだから、

$$u(r, \theta) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta] \quad (8.35)$$

を使って解くことを考えよう。これを方程式に入れて係数についての常微分方程式

$$\frac{d^2 A_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} A_n(r) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.36)$$

$$\frac{d^2 B_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} B_n(r) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8.37)$$

が得られる。これから、原点でも有界な解を得る (同次常微分方程式であることに注目)：

$$A_n(r) = A_n r^n, \quad B_n(r) = B_n r^n, \quad (8.38)$$

ただし  $A_n, B_n$  は定数である。 $r = a$  における境界条件によってこれらの係数は決まってしまう。

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi. \quad (8.39)$$

こうして、われわれの解は (8.35)

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos n(\phi - \theta) \right) d\phi \quad (8.40)$$

あるいは、和を実行して Poisson の公式 (Poisson's formula)

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi. \quad (8.41)$$

に到達する。

## 8.6 拡散方程式.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.42)$$

を  $x \in (0, l)$ 、 $t > 0$  で、初期条件  $u(x, 0) = A$  ( $x \in (0, l)$ ) および境界条件  $u(0, t) = B$ 、 $u(l, t) = C$  ( $t > 0$ ) の下で解こう。ここで  $A, B, C$  は定数とする。<sup>52</sup>  
賢い (そして 標準的な) 手を使って同次境界値問題に変換できる：つぎの

$$v = u - \left( \frac{C - B}{l} x + B \right). \quad (8.43)$$

を考えると

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (8.44)$$

が  $x \in (0, l)$  と  $t > 0$  で成立し、初期条件は  $v(x, 0) = (B - C)x/l + A - B$  ( $x \in (0, l)$ )、境界条件は  $v(0, t) = 0$  and  $v(l, t) = 0$  ( $t > 0$ ) となる。そこで次の解を想定して良い：

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (8.45)$$

以上の方法は  $A, B, C$  が時間に依存していても使えることに注意。

### 演習.

- (1)  $[0, \pi]$  で一次元拡散方程式を考える ( $t \geq 0$ )。境界条件は同次 Neumann 条件で初期条件は  $u(x, 0) = \sin^2 x$ 。
- (2)  $[0, \pi]$  で一次元拡散方程式を考える ( $t \geq 0$ )。境界条件は同次 Dirichlet 条件で初期条件は  $u(x, 0) = x$ 。
- (3)  $[0, 1]$  上で拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.46)$$

を初期条件  $u(x, 0) = \sin(\pi x/2)$  および境界条件  $u(0, t) = 0$ 、

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = -\frac{1}{\nu} u(1, t) \quad (8.47)$$

の下で解け。ここで  $\nu$  は定数 (つまり、同次 Robin 条件)。

[ヒント:  $\mu_n$  を  $\tan x + \nu x = 0$  のゼロを小さい方から並べていくとき第  $n$ -番目のゼロとすると

$$\int_0^1 \sin(\mu_n x) \sin(\mu_m x) dx = \delta_{m,n} \frac{1 + \nu \cos^2 \mu_n}{2}. \quad (8.48)$$

---

<sup>52</sup> 境界条件は  $t = 0$  には課していないことに注意。したがって、 $A, B, C$  は矛盾を恐れず勝手にとっていい。

]

(4) 半径  $\ell$  の断熱された輪がある。その熱拡散係数を  $D$  としよう。初期の温度分布は

$$T(0, x) = T_0 \cos \frac{2x}{\ell}, \quad (8.49)$$

ここで  $x$  は輪に沿った座標とする。  $T(t, x)$  を求めよ。

(5) 長さ  $\ell$  の棒がある。その熱拡散係数を  $D$  としよう。一端、たとえば  $x = 0$ 、での温度は時間の関数として  $T(x = 0, t) = T_0 e^{-\alpha t}$  ( $\alpha > 0$ , 定数) と与えられ、他端は一定温度  $T_0$  にいつも ( $t > 0$ ) 保たれているとする。初期の温度分布は  $T(x, 0) = T_0 \sin(3\pi x/\ell)$  とする。温度分布を時間の関数として与えよ ( $t > 0$ )。

## 8.7 一次元波動方程式.

つぎの一次元波動方程式を考えよう：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.50)$$

ただし領域は  $[0, a]$  ( $t \geq 0$ ) であり  $c$  は正の定数とする。補助条件は

初期条件:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $\partial_t u(x, 0) = 0$  ( $x \in [0, a]$ ),

境界条件:  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  ( $t \geq 0$ )。

滑らかな初期条件に対して解が一意存在であることを知っている ( $\rightarrow$  1.17)。

変数分離の核心は Fourier 式の展開であるから、ただちに解を次の形に想定して良い (cf. 2.4):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right). \quad (8.51)$$

境界条件はすでに取り込まれている。初期条件は

$$a_n(0) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) dx, \quad (8.52)$$

および  $a'_n(0) = 0$  を要求する。つまり波動方程式は次の常微分方程式の組に翻訳された：

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} = -c^2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} a_n(t). \quad (8.53)$$

これから

$$a_n(t) = a_n(0) \cos \left( \frac{cn\pi t}{a} \right). \quad (8.54)$$

### 演習.

(1)  $[0, \pi]$  上のつぎの方程式 for

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u \quad (8.55)$$

非同次 Dirichlet 境界条件および初期条件  $u(x, 0) = \sin x$ ,  $\partial_t u(x, 0) = 0$  の下で解け。

(2) 波速  $c$  の一次元波動方程式を初期条件

$$u(0, x) = \sin \frac{3\pi}{2\ell} x, \quad \partial_t u(0, x) = 0 \quad (8.56)$$

および境界条件  $u(t, 0) = 0$ ,  $\partial_x u(t, 0) = 0$  ( $t > 0$  つまり  $x = 0$  は固定、 $x = \ell$  は開放) の下で解け。

**課題.**

ヴァイオリンの弦の時刻  $t$  における形はへの字型である。その折れ曲がり点は放物線の上を運動する (写真を見よ)。式で書けば

$$\phi(x, t) = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin k_n x \sin \omega_n t, \quad (8.57)$$

ここに  $k_n = \pi n / L$ ,  $\omega_n = c k_n$  で  $c$  は波速である。 $C$  は音の大きさに関係した係数。

## 8.8 変数分離: 一般論.

時間に関係した普通興味のある偏微分方程式は

$$L_t \psi(\mathbf{x}, t) = Q \psi(\mathbf{x}, t) \quad (8.58)$$

という形をしている。ここで作用素  $L_t$  は時間の関数にのみ作用し、作用素  $Q$  は空間座標の関数にのみ作用するとする。時空座標は簡単に分離できて

$$L_t \psi_1(t) = \mu \psi_1(t), \quad (8.59)$$

$$Q \psi_2(\mathbf{x}) = \mu \psi_2(\mathbf{x}). \quad (8.60)$$

第一の方程式は常微分方程式であるので一般解を求めるのはたやすい。 $Q$  が「良い」性質を持っていれば、有限次元における固有関数展開を真似することが出来る。形式的には (8.58) は次のように変形できる：

$$L_t \langle \varphi_\mu(\mathbf{x}) | \psi(\mathbf{x}, t) \rangle = \mu \langle \varphi_\mu(\mathbf{x}) | \psi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (8.61)$$

ここで  $\varphi_\mu(\mathbf{x})$  は作用素  $Q$  の固有関数 ( $Q\varphi_\mu(\mathbf{x}) = \mu\varphi_\mu(\mathbf{x})$ ) であり、「内積」は

$$\langle \varphi_\mu(\mathbf{x}) | \psi(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv \int_D d\mathbf{x} \overline{\varphi_\mu(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (8.62)$$

と定義している。これは Fourier 係数の Fourier による計算公式である。そこで、最終結果は

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_\mu \langle \varphi_\mu(\mathbf{x}) | \psi(\mathbf{x}, t) \rangle \varphi_\mu(\mathbf{x}), \quad (8.63)$$

ただし、和は固有値について取る。すでに述べたように、変数分離の極意は 問題に適合した 一般化された Fourier 展開を見つけることである。

### 8.9 実戦的な変数分離法.

非同次境界条件の下で偏微分方程式を解析的に解く一般的戦略はつぎのようにまとめられるだろう。

(A) 問題の領域が「まともな」形をしていないとき (つまり、直交曲線座標の一つを一定に保つ図形のくみあわせでないとき)、解析的な解は諦めたがいい。

(B) 領域の形がいいときは、境界値問題の問題集をめくれ。たとえば N. N. Lebedev, I. P. Skalskaya and Y. S. Ufliand, *Worked Problems in Applied Mathematics* (Dover 1965).<sup>53</sup> もし、似たような問題が見つからないときは、特殊関数の専門家でもない限り解析解は諦めるのが無難である。

(C) それでも解析解が欲しいというならば

(1) 重ね合わせの原理を使ってある一座標方向にのみ非同次境界条件を持った問題に分解せよ。こうして得られる問題にとって、残りの座標方向は固有値問題を解くべき方向となる。

(2) 得られた固有関数系が「問題に適合した」一般化された Fourier 展開の基底を与える。

(3) 非同次境界条件を使って展開係数を決めよ。8.12 に実戦的な難しい例がある。

### 8.10 変数分離法を正当化する理論的基礎は何か。

(1) いつ展開 (8.63) が許されるか? これに応えるには Hilbert 空間と線形作用素の基礎知識がいる。

(2) 作用素  $Q$  の固有関数が必要である。そのためにはさらなる変数分離で一次元ないしは二次元問題に帰着し、線形常微分方程式の固有値問題 (Sturm-Liouville 問題) を理解する必要がある。固有関数の具体的な形は特殊関数で書かれる。

### 8.11 特殊関数とは何か?

特殊関数という言葉は

(1)  $\Gamma$ -関数と関連した関数

(2) 初等関数では書けない初等関数の不定積分 (たとえば、正規分布関数)

(3) 楕円関数、

(4) 初等関数で書けない二階線形常微分方程式の解、

(5) 特別な二階常微分方程式の解 (たとえば、Painlevé 関数)。

<sup>53</sup> これは特殊関数の使い方についてのコンパクトながらいへん良い教科書 N. N. Lebedev, *Special Functions & Their Applications* (Dover, 1965) に準拠した問題集。解答はだいたいある。

**8.12 Case study of separation of variables: Laplace equation with Dirichlet condition.** The purpose of this entry is to provide a show case with the aid of a fairly difficult problem. The region is fan-shaped:  $z \in [0, h]$ ,  $\varphi \in [0, \phi]$  and  $r \in [a, b]$ :

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi = 0 \quad (8.64)$$

( $\rightarrow ??$ ) with the boundary condition

$$\psi(r, \varphi, 0) = f_0(r, \varphi), \quad \psi(a, \varphi, h) = f_h(r, \varphi), \quad (8.65)$$

$$\psi(r, 0, z) = g_0(r, z), \quad \psi(r, \phi, z) = g_\phi(r, z), \quad (8.66)$$

$$\psi(a, \varphi, z) = h_a(\varphi, z), \quad \psi(b, \varphi, z) = h_b(\varphi, z). \quad (8.67)$$

First we perform the step (C)(1) of 8.9. The separation procedure  $\psi = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$  gives three distinct eigenvalue problems. The full solution is the superposition of the solutions to all the following three problems (1)-(3).

(1) With the boundary condition ( $r, \varphi$  homogeneous;  $z$  inhomogeneous):

$$\psi(r, \varphi, 0) = f_0(r, \varphi), \quad \psi(r, \varphi, h) = f_h(r, \varphi), \quad (8.68)$$

$$\psi(r, 0, z) = 0, \quad \psi(r, \phi, z) = 0, \quad (8.69)$$

$$\psi(a, \varphi, z) = 0, \quad \psi(b, \varphi, z) = 0. \quad (8.70)$$

The separated equations are

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad (8.71)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 Z, \quad (8.72)$$

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] - \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2 = 0. \quad (8.73)$$

The eigenvalue problems are (8.71) and (8.73) with homogeneous Dirichlet boundary conditions ( $\Phi(0) = \Phi(\phi) = 0$  and  $R(a) = R(b) = 0$ ). The positivity of  $\alpha^2$  and  $m^2$  follows from the negative definiteness of the operators.<sup>54</sup> The solution must have the following form:

$$\psi = \sum_{m, \alpha} (A_{m, \alpha} J_m(\alpha r) + B_{m, \alpha} N_m(\alpha r)) (C_m \sin m\varphi + D_m \cos m\varphi) (E_{m, \alpha} \sinh \alpha z + F_{m, \alpha} \cosh \alpha z). \quad (8.74)$$

Here  $J_m$  is the Bessel function ( $\rightarrow ??-??$ ), and  $N_m$  is the Neumann function ( $\rightarrow ??$ ).  $m$ ,  $C_m$  and  $D_m$  are fixed by the Dirichlet condition:

$$D_m = 0; \quad C_m \sin m\phi + D_m \cos m\phi = 0. \quad (8.75)$$

---

<sup>54</sup> Intuitively speaking, the eigenfunctions must be oscillatory functions to satisfy the orthogonality condition. “Negative definiteness” of an operator  $L$  means  $\langle f | L | f \rangle \leq 0$  for any ket  $|f\rangle$ . The Laplacian  $\Delta$  is a typical example.



We may choose  $C_m = 1$  without any loss of generality.  $\alpha$ ,  $A_{m,\alpha}$  and  $B_{m,\alpha}$  are fixed by the Dirichlet condition

$$A_{m,\alpha}J_m(\alpha a) + B_{m,\alpha}N_m(\alpha a) = 0, \quad (8.76)$$

$$A_{m,\alpha}J_m(\alpha b) + B_{m,\alpha}N_m(\alpha b) = 0. \quad (8.77)$$

That is,  $J_m(\alpha a)N_m(\alpha b) = J_m(\alpha b)N_m(\alpha a)$  fixes  $\alpha$ .  $E$  and  $F$  are determined from the inhomogeneous boundary condition (8.70) with the aid of complete orthogonality ( $\rightarrow ??$ ) of the eigenfunctions constructed above (not easy or almost impossible bu hand for general  $a$  and  $b$ ).

(2) With the boundary condition ( $r, z$  homogeneous;  $\varphi$  inhomogeneous)

$$\psi(r, \varphi, 0) = 0; \psi(a, \varphi, h) = 0, \quad (8.78)$$

$$\psi(r, 0, z) = g_0(r, z); \psi(r, \phi, z) = g_\phi(r, z), \quad (8.79)$$

$$\psi(a, \varphi, z) = 0; \psi(b, \varphi, z) = 0. \quad (8.80)$$

The separated equations are

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi} = m^2\Phi, \quad (8.81)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -\alpha^2Z, \quad (8.82)$$

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 = 0. \quad (8.83)$$

Here the positivity of  $\alpha^2$  is obvious from the condition that (8.82) becomes an eigenvalue problem (it is is not elementary to see this  $\rightarrow ??$  Discussion (B)).  $m^2$  also must be positive so that (8.83) becomes an eigenvalue problem. Hence, we may assume

$$\psi = \sum_{m,\alpha} (A_{m,\alpha}I_{im}(\alpha r) + B_{m,\alpha}K_{im}(\alpha r))(C_m \sinh m\varphi + D_m \cosh m\varphi)(E_\alpha \sin \alpha z + F_\alpha \cos \alpha z), \quad (8.84)$$

where  $I$  and  $K$  are modified Bessel functions ( $\rightarrow ??$ ). Here  $\alpha$ ,  $E_\alpha$  and  $F_\alpha$  are fixed by the Dirichlet condition

$$F_\alpha = 0; E_\alpha \sin \alpha h + F_\alpha \cos \alpha h = 0. \quad (8.85)$$

$E_\alpha = 1$  is admissible.  $m$ ,  $A_{m,\alpha}$  and  $B_{m,\alpha}$  are determined by the boundary conditions

$$A_{m,\alpha}I_{im}(\alpha a) + B_{m,\alpha}K_{im}(\alpha a) = 0, \quad (8.86)$$

$$A_{m,\alpha}I_{im}(\alpha b) + B_{m,\alpha}K_{im}(\alpha b) = 0. \quad (8.87)$$

That is,  $I_{im}(\alpha a)K_{im}(\alpha b) = I_{im}(\alpha b)K_{im}(\alpha a)$  determines  $m$ .  $C$  and  $D$  are determined from the inhomogeneous boundary condition (8.79) with the aid of complete orthogonality of the

eigenfunctions constructed above.<sup>55</sup>

(3) With the boundary condition ( $\varphi, z$  homogeneous;  $r$  inhomogeneous)

$$\psi(r, \varphi, 0) = 0, \quad \psi(r, \varphi, h) = 0, \quad (8.88)$$

$$\psi(r, 0, z) = 0, \quad \psi(r, \phi, z) = 0, \quad (8.89)$$

$$\psi(a, \varphi, z) = h_a(\varphi, z), \quad \psi(b, \varphi, z) = h_b(\varphi, z). \quad (8.90)$$

The separated equations are<sup>56</sup>

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi} = -m^2 \Phi, \quad (8.91)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2 Z, \quad (8.92)$$

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 = 0. \quad (8.93)$$

The eigenvalue problems are easy ones: (8.91) and (8.92) with homogeneous Dirichlet conditions. We may thus assume

$$\psi = \sum_{m, \alpha} (A_{m, \alpha} I_m(\alpha r) + B_{m, \alpha} K_m(\alpha r)) (C_m \sin m\theta + D_m \cos m\theta) (E_\alpha \sin \alpha z + F_\alpha \cos \alpha z). \quad (8.94)$$

Here,  $I_m$  and  $K_m$  are modified Bessel functions ( $\rightarrow ??$ ).  $A$  and  $B$  must be fixed from the boundary condition (8.90).

### 8.13 Remarks to 8.12.

(1) If the region in the  $z$ -direction is not bounded, we need Fourier transformations; if the region is not bounded in the  $r$ -direction, we need the Fourier-Bessel(-Dini) transformation ( $\rightarrow ??$ ).

(2) The boundary condition in the  $\varphi$  direction may be periodic.

(3) The Neumann condition case is analogous.

---

<sup>55</sup> This problem is nontrivial, since we need modified Bessel functions of imaginary order. See N. N. Lebedev, *Special Functions & Their Applications* (Dover 1972) Section 6.5.

<sup>56</sup> In this case obviously  $m^2$  and  $\alpha^2$  must be non-negative.

## 9 球面調和関数

### 9.1 球座標での変数分離.

球座標では 3 次元 Laplacian は ( $\rightarrow$ 5.10)

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} L, \quad (9.1)$$

ここに

$$L = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (9.2)$$

変数を  $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$  のように分離すると,

$$\frac{d^2}{dr^2} r R(r) = l(l+1) \frac{R(r)}{r}, \quad (9.3)$$

$$LY(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y(\theta, \varphi). \quad (9.4)$$

が得られる。 $L$  は単位球面上の Laplace 作用素であり、それは負確定の作用素である。

### 9.2 さらに変数分離.

さらに  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  とおくと  $\varphi$ -方向は周期的でなくてはならぬ。つまり、 $\Phi$  についての固有値問題を考えるべきである (cf. 8.12)。よって、

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi. \quad (9.5)$$

残りは

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (9.6)$$

### 9.3 Legendre 方程式.

もし  $x = \cos \theta$  を導入すれば、(9.6) は

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0, \quad (9.7)$$

となる。これは (変形) Legendre 方程式 (modified Legendre's equation) と呼ばれる。

### 9.4 $m = 0$ の場合. $m = 0$ だと Legendre 方程式は

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + l(l+1)\Theta = 0, \quad (9.8)$$

この一般解は

$$\Theta = AP_l(x) + BQ_l(x), \quad (9.9)$$

とかける。ここで  $P_l$  および  $Q_l$  はそれぞれ第一種および第二種 Legendre 関数といわれる。Mathematica では LegendreP[l,x] が  $P_l(x)$  を与える。そこで  
`Plot[LegendreP[l,x], {x, -1, 1}]`  
 がそのグラフを与える ( $l$  には適当な実数を入れること)。LegendreQ[l,x] は  $Q_l(x)$  である。 $Q_l$  は  $x = \pm 1$  で有界ではないので、いまの問題の解答には現れない ( $B = 0$  が要求される)。また、 $P_l$  は  $x = -1$  で、 $l$  が正整数でない限り有界ではない。よって  $P_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ 、Legendre 多項式) だけがわれわれには有用である。つまり、 $l$  は正の整数でなくてはならない (われわれは固有値問題を解いたのである)。

### 9.5 $m \neq 0$ の場合.

$Z(x)$  を次のように定義すると

$$\Theta = (1 - x^2)^{m/2} Z(x), \quad (9.10)$$

(9.7) は

$$(1 - x^2) \frac{d^2 Z}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dZ}{dx} + (n-m)(n+m+1)Z = 0. \quad (9.11)$$

となる。この方程式は (9.7) を  $m$  回微分すると得られる。そこで (9.7) の一般解は

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad Q_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x). \quad (9.12)$$

の線形和で与えられる。これらの関数は  $P_n$ 、 $Q_n$  の**陪関数**といわれる。解が  $x = 1$  で有界であることを要求すると  $P_n^m$  のみが現れることになる。

Mathematica では陪関数  $P_n^m(x)$  は  
`LegendreP[n,m,x]`  
 などで得られる。

### 9.6 Legendre 陪関数. (associate Legendre functions)

もし  $m$  が奇数だと  $P_n^m$  は多項式ではない：

$$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} = \sin \theta, \quad (9.13)$$

$$P_2^1(x) = 3(1 - x^2)^{1/2}x = 3 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2} \sin 2\theta, \quad (9.14)$$

$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2) = 3 \sin^2 \theta = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad (9.15)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2} (1 - x^2)^{1/2} (5x^2 - 1) = \frac{3}{8} (\sin \theta + 5 \sin 3\theta), \quad (9.16)$$

$$P_3^2(x) = 15(1 - x^2)x = \frac{15}{4} (\cos \theta - \cos 3\theta), \quad (9.17)$$

$$P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \theta = \frac{15}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta), \quad (9.18)$$

etc. ただし、 $x = \cos \theta$ 。

## 9.7 Legendre 陪関数の正規直交化.

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{k,l}. \quad (9.19)$$

[略証].  $l > m, k > m$  に対して左辺は

$$f(m) \equiv \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_k}{dx^m} \frac{d^m P_l}{dx^m} dx \quad (9.20)$$

$$= - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx} \left( (1-x^2)^m \frac{d^m P_l}{dx^m} \right) dx. \quad (9.21)$$

他方  $m$  を  $m-1$  で、 $n$  を  $l$  で (9.11) において置き換え  $(1-x^2)^{m-1}$  を掛けると

$$\frac{d}{dx} (1-x^2)^m \frac{d^m P_l}{dx^m} = -(l+m)(l-m+1)(1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_l}{dx^{m-1}}. \quad (9.22)$$

よって (9.21) は

$$f(m) = (l+m)(l-m+1)f(m-1) = \cdots = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} f(0). \quad (9.23)$$

$f(0) = 2/(2l+1)$  は別に計算しなくてはならない。

## 9.8 球面調和関数.(spherical harmonics).

以上の準備で  $L_2(S_2, \sin \theta)$  ( $S_2$  は単位二次元球面 = 3次元単位球の表面) の固有関数に基づく正規直交基底を作ることができる。ケットベクトル  $\{|l, m\rangle\}$  を

$$\begin{aligned} \langle \theta, \varphi | l, m \rangle &= Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= (-)^{\{1+(-1)^m\}/2} \sqrt{\frac{2l+2}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

ただしケット  $|\theta, \varphi\rangle$  は

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta |\theta, \varphi\rangle \sin \theta \langle \theta, \varphi| = 1. \quad (9.25)$$

を満たし

$$\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle = \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') / \sin \theta. \quad (9.26)$$

## 9.9 球面調和関数の正規直交関係.

1 の分解は

$$1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |l, m\rangle \langle l, m| \quad (9.27)$$

規格化条件は

$$\langle l, m | l', m' \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (9.28)$$

これらは通常表記法では

$$\frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')}, \quad (9.29)$$

および

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (9.30)$$

である。

**9.10 角運動量.** 量子力学では  $-\hbar^2 L^2$  は全角運動量作用素である。  $|l, m\rangle$  は全角運動量作用素とその  $z$ -成分に対応する作用素  $M_z$  の同次固有ベクトルである：

$$(i\hbar)^2 L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle, \quad (9.31)$$

$$M_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle. \quad (9.32)$$

## 10 拡散方程式の定性的性質

### 10.1 最大値原理

$I$  を  $x$ -軸上の区間として  $u$  を  $\Omega \equiv I \times [0, T]$  上の拡散方程式

$$u_t = u_{xx} \quad (10.1)$$

の解とする。このとき  $u$  の最大値は**放物境界** (parabolic boundary)  $\Gamma = \partial I \times [0, T] \cup I \times \{0\}$  上にしかない。特に、区間  $I$  上の  $|u|$  は時間の単調減少関数である。

[略証]  $\mu$  を  $u$  の放物境界  $\Gamma$  上での最大値とし

$$v = e^{-t}(u - \mu). \quad (10.2)$$

とおく。 $v$  は  $\Omega^\circ$  において次の式を満たす：

$$v_t + v = v_{xx} \quad (10.3)$$

<sup>57</sup> もしも  $\Gamma$  での  $v \leq 0$  が  $I^\circ \times (0, T]$  での  $v \leq 0$  を意味することが示されればほとんど終わり。 $v$  が最大値  $v = v_0 > 0$  を  $(x_0, t_0) \in \Omega^\circ$  でとると仮定しよう。その点において  $v_{xx} \leq 0$  かつ  $v_t = 0$ 。それゆえ (10.3) は  $v_0 \leq 0$  を意味し、矛盾である。もしも境界  $t = T$  に最大値があったとすると  $v_t \geq 0$ ,  $v_{xx} \leq 0$  だから  $v < 0$ 。

(1) この原理は  $d$ -次元空間でも成立する。論証法も似たようなものである。

(2) 略証から分かるように、解が有界であることが保証されていれば領域が有界でなくてもこの原理は成立する。

### 課題

解の中のピークの数について何が言えるか??

### 10.2 適切性 (well-posedness in the sense of Hadamard).<sup>58</sup>

たとえ一義的な解があったとしても、もしも解が補助条件に極めて敏感に依存するならば、再現性の良い現象を記述するモデルとしては偏微分方程式モデルは無益であろう。

(数学の) 問題が (Hadamard の意味で) **適切** (well-posed) であるとは次の条件を満たすことである：

(1) 一義的な解が存在する<sup>59</sup>

そして

(2) 解は補助条件に連続的に依存する。

そうでないときは問題は不適切 (ill-posed) といわれる。<sup>60</sup>

### 10.3 Dirichlet 条件下の拡散方程式の初期値問題は適切である。

ここでは有界領域のみを扱い、また解の存在証明はしない。

<sup>57</sup>  $A^\circ$  は集合  $A$  の開核 (open kernel)。

<sup>58</sup> Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963. 数学的創造性についての小冊子 J. Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Dover, 1945) は読むに値する。

<sup>59</sup> 解があるということは問題が過剰には決定されていない (not overdetermined) ということであり、一義であるということは不十分には決定されていない (no underdetermined) というのである。

<sup>60</sup> より正確にいうと、(2) で連続性を云々するにはノルムなどをきちんと決めてかからなくてはならないが、いわんとするところは明らかだろう。

[略証]  $u_1, u_2$  を二つの解であるとする。線形性から  $u = u_1 - u_2$  は同次補助条件を満たす同じ方程式の解である。最大値の原理から  $u$  は 0 よりは大きくなれない。同様に  $-u$  も 0 より大きくなれない。よって、 $u_1 = u_2$ 、つまり、解は一義的である。次に補助条件を少し変えた問題の答を  $u_2$  もとのままを  $u_1$  と書くことにしよう。最大値の原理から領域内で  $|u_1 - u_2|$  は補助条件における差よりも大きくはなれない。よって、解は補助条件に連続的に依存する。

**10.4 順序の保存、正確定性.**(preservation of order)  $u_1$  と  $u_2$  を 10.1 と同様領域  $\Omega$  における拡散方程式の解とし、放物境界において ( $\rightarrow$ 10.1)  $u_1 \leq u_2$  ならば、 $u_1 \leq u_2$  が  $\Omega^\circ$  でなりたつ。たとえば初期に  $u_1 \leq u_2$  at  $t = 0$  ならこの順序は未来永劫保たれる。特に初期値が正、境界条件が正なら解はいつも正である。最大値原理から自明であろう。

#### 10.5 無限の伝播速度.

もしも初期に熱エネルギーが局在しているとする  $t = 0$  (i.e.,  $T(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$ ):

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \quad (10.4)$$

は  $\partial_t T = \Delta T$  の解であった。勝手な正の  $t$  たいしてどんなに  $x$  が原点から遠かろうと  $T(x, t) > 0$  である。したがって、熱は無限の速度で伝播すると結論せざるを得ない。物質の拡散でも同じである。これは物理的にはナンセンスであるが、ほとんどのところで速く伝播している「裾」は指数関数よりもはるかに小さいから無害なのである。これが問題になるのは速い現象の時のみで、その時は拡散方程式は修正されなくてはならない。

**10.6 Maxwell-Cattaneo 方程式.**<sup>61</sup> 短時間の挙動を変えることは高階微係数を付け加えることによってのみ可能である。そこで次の修正が提案された：

$$c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = D_T \Delta T, \quad (10.5)$$

ここに  $c$  は正定数であり熱伝導に関する分野では *Maxwell-Cattaneo 方程式* (Maxwell-Cattaneo equation) と呼ばれている。これは波動方程式に強い減衰効果がかかった式とも考えられるので伝播速度は有限である。

---

<sup>61</sup> cf. Compt. Rend. **247**, 431 (1958).



## 11 Laplace 方程式の定性的性質

### 11.1 Laplace 方程式と調和関数.

Laplace の古典解は**調和関数** (harmonic function) と呼ばれる。電位は電荷のないところでは調和関数である。平衡状態にある太鼓の革はその枠の形状によらず調和関数である。

### 11.2 Green の公式 (Green's formula)

$D \subset \mathbf{R}^n$  を有界領域とし  $u$  と  $v$  は  $D$  の閉包上の  $C^2$ -関数とする。便宜のため公式をここに再録する。

$$\int_D (v\Delta u + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) d\tau = \int_{\partial D} v \text{grad } u \cdot d\mathbf{S}, \quad (11.1)$$

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) d\tau = \int_{\partial D} (v \text{grad } u - u \text{grad } v) \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.2)$$

### 11.3 球平均定理 (Spherical mean-value theorem)

$u$  は領域  $D \subset \mathbf{R}^n$  で調和関数であり、 $B_r(x)$  を中心  $x$  半径  $r$  の球で  $B_r(x) \subset D$  であるとする。このとき

$$u(x) = \frac{1}{S_{n-1}(r)} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y), \quad (11.3)$$

ただし  $d\sigma(y) = |d\mathbf{S}(y)|$  は表面面積要素、 $S_{n-1}(r)$  は  $(n-1)$  次元の半径  $r$  の球の界面<sup>62</sup> である。□

これは Laplace 作用素の意味から期待されていたことである。

[略証]  $v(y) = 1/|x-y|^{n-2}$  ( $n > 2$ ) または  $\ln|x-y|$  ( $n = 2$ ) と (11.2) と選び、 $D = B_r(x) \setminus B_\epsilon(x)$  ( $r > \epsilon$ ) とする。<sup>63</sup>  $v$  は調和関数であるから  $\mathbf{R}^n \setminus \{x\}$  において  $v(y)$  は  $D$  で調和関数である。(11.2) の右辺を計算するためには  $\partial B_r(x)$  における微分の計算がいる：

$$\frac{\partial v}{\partial n} = (2-n)r^{1-n}. \quad (11.4)$$

$u(y)$  も  $v(y)$  も  $D$  で調和的なので (11.2) は

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} (v\partial_n u - u\partial_n v) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B_r(x)} (v\partial_n u - u\partial_n v) d\sigma(y) - \int_{\partial B_\epsilon(x)} (v\partial_n u - u\partial_n v) d\sigma(y). \end{aligned} \quad (11.5)$$

(11.4) と (7.21) を使って、これを次のように書き直す：

$$0 = -(2-n) \left[ r^{1-n} \int_{\partial B_r(x)} u d\sigma(y) - \epsilon^{1-n} \int_{\partial B_\epsilon(x)} u d\sigma(y) \right], \quad (11.6)$$

これから

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-n} \int_{\partial B_\epsilon(x)} u d\sigma(y) = S_{n-1}(r) u(x). \quad (11.7)$$

この定理の逆も亦た真である。

<sup>62</sup>  $S_{n-1}(r) = 2\pi^{n/2} r^{n-1} / \Gamma(n/2)$ .

<sup>63</sup>  $A \setminus B$  は  $A$  に入っているが  $B$  には入っていない点の集まり； $A \setminus B \equiv \{x | x \in A, x \notin B\}$ 。

#### 11.4 定理 [平均値の定理の逆].

$u$  は領域  $D$  で連続であるとする。もしも 11.3 が勝手な  $r > 0$  と  $x$  について  $B_r(x) \subset D$  で成立するならば、 $u$  は  $C^\infty$  で  $D$  において調和的である。□<sup>64</sup>

#### 11.5 最大値原理 (maximum principle).

$D$  を開領域、 $u$  はそこで調和関数とする。  $\sup_{x \in D} u(x) \equiv A < \infty$  とする。もしも  $u \not\equiv A$  が  $\forall x \in D$  で成り立つとすると  $\forall x \in D$  で  $u(x) < A$ 。□

これは平均値の定理 11.3 から自明である。あるいは、調和関数は拡散方程式の定常解なので拡散方程式についての最大値原理 (→10.1) から分かる。物理的にももっともらしいだろう。 $u$  を  $-u$  と取り替えることで最小値原理も導ける。この定理から:

**系.**  $D$  をコンパクト集合とし、 $u$  は  $D$  の開核で調和的で  $D$  で連続とする。このとき  $D$  上の最大値は  $\partial D$  の上にある。□

課題.

$$\Delta u = u - u^3 \quad (11.8)$$

を 3次元空間の有界領域  $\Omega$  で考えよう。 $u = 0$  が  $\partial\Omega$  で成り立っているとする。このとき  $-1 \leq u \leq 1$  を示せ。

#### 11.6 強最大値原理 (strong maximum principle)

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$  を有界領域としそこで  $u$  は調和的であるとしよう。もしも  $u$  がその最大値  $M$  を  $\Omega$  の内点でとると  $u$  は  $\Omega$  で一定である。

これも平均値の定理から明らかであろう。

#### 11.7 適切性.

有界領域  $D$  での Laplace 方程式の解は、もしあるならば、<sup>65</sup> 一つであり境界条件に連続的に依存する。□

証明法は拡散方程式の場合と似たり寄ったり (→10.3)。

[略証]  $u_1$  および  $u_2$  を同一の問題の二つの解とする。線形性から  $u = u_1 - u_2$  は同次境界条件下で Laplace 方程式に従う (→11.5)。  $u$  は 0 より大きくはなれない、また  $-u$  もそうなので、 $u_1 = u_2$ 。つまり、解があれば一義的である。次に、少し境界条件を少し変えた二つの問題の解を  $u_1, u_2$  としよう。最大値の原理は  $|u_1 - u_2|$  は境界で以上に大きくはならない。

#### 11.8 解の滑らかさ.

調和関数は、大雑把に言えば、空間的移動平均で不変な関数だから、十分滑らかであると予想される。実際

**定理.** Laplace 方程式の解は実解析的である。<sup>66</sup> □

<sup>64</sup> 定理については Folland p91 (2.5) を見よ。

<sup>65</sup> まだ解を構成していないことを忘れないように！

<sup>66</sup> 解析的とは Taylor 展開が収束するということである。

課題.

$f$  が解析的なら  $\Delta u = f$  の解も解析的である (Courant-Hilbert)。

### 11.9 比較定理 (comparison theorem)

$u$  と  $v$  は有界領域  $\Omega$  での調和関数であるとする。もし  $\partial\Omega$  において  $u \geq v$  であれば  $\Omega$  において  $u \geq v$  が成立する。

### 11.10 Liouville の定理<sup>67</sup> (Liouville's theorem)

もしも  $u$  が全空間で有界な調和関数であればそれは定数である。<sup>68</sup>

---

<sup>67</sup> Joseph Liouville, 1809-1882.

<sup>68</sup> Folland p94 (2.11).

## 12 波動方程式の定性的性質

### 12.1 依存領域、有限の伝播速度.

D'Alembert の解  $u$  の  $x$ 、 $t$  における値は区間  $[x - ct, x + ct]$  の初期条件で完全に決まる。この区間は**依存領域**と呼ばれる。逆に、場所  $\zeta$  にある初期条件は時刻  $t$  において  $[\zeta - ct, \zeta + ct]$  の区間に影響を与える。

### 12.2 エネルギー保存

**エネルギー積分** (energy integral)

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (12.1)$$

は時間に依存しない。空間積分と時間微分を交換できれば証明は簡単である。

### 12.3 一義性再考.

問題は線形だから  $v$  が波動方程式をみたし補助条件が同次なら  $v(x, t) = 0$  が  $D \times [0, t]$  で成り立つことをいえばよい。この条件では初期エネルギーはゼロだから、エネルギー保存の意味することは  $\partial_t v(x, t) = \partial_x v(x, t) = 0$  であり、 $v$  が一定、すなわち  $v \equiv 0$ 。

### 12.4 適切性.

一次元波動方程式に異なった補助条件  $u(x, 0) = f_i(x)$ 、 $\partial_t u(x, 0) = g_i(x)$  in  $\mathbf{R}$  ( $i = 1, 2$ ) を課して問題を二つ作る。これから D'Alembert の公式を使って

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \|f_1 - f_2\|_{\max} + |t| \|g_1 - g_2\|_{\max} \quad (12.2)$$

よって、解は補助条件に連続的に依存する。

### 12.5 3次元波動方程式：Huygens の原理.

つぎの初期値問題をかんがえよう：

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u \quad (12.3)$$

初期条件は

$$u = f(x), \partial_t u = g(x) \text{ for } t = 0. \quad (12.4)$$

3次元空間におけるこの解は

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) d\sigma(y) \right). \quad (12.5)$$

これは **Huygens の原理** (Huygens' principle) のあらわな表現である。この式は以下のように示される。

### 演習.

3次元波動方程式を

$$u_{tt} = \Delta u \quad (12.6)$$

初期条件  $u = x^2 + y^2 + z^2$ 、 $u_t = z$  の下で解け。

いうまでもなく、非同次問題  $\square u = q$  は Green 関数を使って重ね合わせの原理で解くことができる。

## 12.6 球平均の方法 [Poisson]. (method of spherical means)

$$M_h(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|y|=1} h(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}), \quad (12.7)$$

を定義する。ここで  $h$  は  $C^2$  関数、 $\sigma$  は球面の面積要素である。 $M_h$  は  $r$  の偶関数である。Gauss の定理を使って 次の **Darboux の方程式** (Darboux's equation) が得られる：

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(\mathbf{x}, r) = \Delta M_h(\mathbf{x}, r). \quad (12.8)$$

ここで  $\Delta$  は  $\mathbf{x}$  の関数に作用する Laplace 作用素であり、結局 (12.3) は次の方程式に変換される：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (rM_u) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_u), \quad (12.9)$$

ただし  $M_u$  は  $\mathbf{x}$ 、 $r$ 、 $t$  の関数  $M_u(\mathbf{x}, r, t)$  として理解されるものとし、初期条件は

$$M_u = M_f, \quad \partial_t M_u = M_g \quad \text{for } t = 0. \quad (12.10)$$

$M_u(\mathbf{x}, 0, t) = u(\mathbf{x}, t)$  に注意。(12.9) は次のように解くことができる。

$$rM_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{2} [(r+ct)M_f(\mathbf{x}, r+ct) + (r-ct)M_f(\mathbf{x}, r-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} yM_g(\mathbf{x}, y) dy. \quad (12.11)$$

$M_f$  および  $M_g$  は  $r$  の偶関数なので、これを次のように書き換えられる

$$M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{(ct+r)M_f(\mathbf{x}, ct+r) - (ct-r)M_f(\mathbf{x}, ct-r)}{2r} + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} yM_g(\mathbf{x}, y) dy. \quad (12.12)$$

ここで  $r \rightarrow 0$  の極限をとろう (l'Hospital の規則を使う)。こうして最後に (12.5) に至る。

## 12.7 焦点.

(12.5) は  $u$  の滑らかさは公式中の微分が存在によって初期条件の滑らかさより一般に劣ることが分かる。このことを *focusing effect* という。一次元ではこれは絶対に起こらない。

## 12.8 波動方程式の数学的本質は何か？

物理的には次のような性質が注目に値する：

特異点はならされることなく伝播する

伝播速度は有限である (→10.5)。

また、波動方程式は Newton の運動方程式そのものであるから Newton-Laplace の決定性がなくてはならず、物理的には初期値問題は（時間双方向に）適切であると予想される (→10.2)。Gårding<sup>69</sup> は、定係数波動方程式（二階よりずっと高階のも考えられる）においては、適切性と双極性が同値であることを示した。<sup>70</sup>

---

<sup>69</sup> Gårding は推薦できる数学の概説書 L. Gårding, *Encounter with Mathematics* (Springer, 1977) を書いている。

<sup>70</sup> See John, Section 5.2.